

Exercice 1 :

Déterminer la nature des séries suivantes et préciser leur somme en cas de convergence

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-3)^n}{5^n} \text{ et } \sum_{n \geq 0} \frac{5^n}{3^{2n}} \text{ et } \sum_{n \geq 0} 0,01$$

Exercice 2 : Le but de cette question est de montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ converge.

1. Déterminer a et b tels que :

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2}.$$

2. Calculer $\sum_{n=0}^3 \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ et $\sum_{n=0}^4 \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

3. Calculer $\sum_{n=0}^k \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

4. Donner la nature et la somme de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Exercice 3 : Le but de cette question est de montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge.

1. Déterminer a , b et c tels que :

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$

2. Calculer, en utilisant le télescopage, $\sum_{n=1}^4 \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ et $\sum_{n=1}^5 \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

3. Calculer $\sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

4. Donner la nature et la somme de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Exercice 4 :

1. (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \ln(n-1) - \ln(n)$$

(b) En déduire que pour tout $k \geq 2$: $\sum_{n=2}^k \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\ln(k)$

(c) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

2. (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

(b) En utilisant le télescopage, calculer $\sum_{n=0}^5 \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

(c) En déduire que pour tout $k \geq 2$: $\sum_{n=0}^k \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \ln(2)$.

(d) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 5 : Soit $(u_n)_{n \geq 2}$ la suite définie pour tout $n \geq 2$ par

$$u_n = \frac{n}{n^2 - 1}$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $u_n \geq \frac{1}{n}$
2. En déduire que la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge.

Exercice 6 : Pour tout $k \geq 3$, on pose

$$S_k = \sum_{n=3}^k \frac{5}{4^n \ln(n)}$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 3$: $0 \leq \frac{5}{4^n \ln(n)} \leq \frac{5}{4^n}$.
2. En déduire que pour tout $k \geq 3$:

$$0 \leq S_k \leq \frac{5}{48} \left(1 - \frac{1}{4^{k-2}} \right).$$

3. En déduire que pour tout la suite $(S_k)_{k \geq 3}$ est majorée.
4. Étudier la monotonie de la suite $(S_k)_{k \geq 3}$.
5. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{5}{4^n \ln(n)}$ converge et que

$$0 \leq \sum_{n \geq 0} \frac{5}{4^n \ln(n)} \leq \frac{5}{48}$$

Exercice 7 :

Pour tout $k \geq 1$, posons : $S_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2}$.

1. Vérifier que pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.
2. En déduire que pour tout $k \geq 2$, $\frac{3}{2} - \frac{1}{k+1} \leq S_k \leq 2 - \frac{1}{k}$.
3. En déduire que la série $(S_k)_{k \geq 1}$ est majorée.
4. Étudier la monotonie de la suite $(S_k)_{k \geq 3}$. En déduire que la série $S_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2}$ converge et que

$$\frac{3}{2} \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \leq 2$$

Exercice 8 : On considère la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_k sa somme partielle d'indice k .

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Indication : Multiplier par l'expression conjuguée $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.

2. En déduire que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \sqrt{k+1} - 1 \leq S_k.$$

3. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice 9 :

Donner la nature et éventuellement la somme de la série suivante :

$$\sum_{n \geq 3} 4 \times \left(\frac{1}{5} \right)^n - 13e^{-7n}$$