Exercice 1 :

Déterminer la nature des séries suivantes et préciser leur somme en cas de convergence

$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-3)^n}{5^n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{5^n}{3^{2n}}$ et $\sum_{n\geqslant 0} 0,01$

Exercice 2 : Le but de cette question est de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ converge.

1. Déterminer a et b tels que :
$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2}.$$
2. Calculer $\sum_{n=0}^{3} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ et $\sum_{n=0}^{4} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.
3. Calculer $\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.
4. Donner la nature et la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Exercice 3 : Le but de cette question est de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge.

1. Déterminer a, b et c tels que :
$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$
2. Calculer, en utilisant le télescopage, $\sum_{n=1}^{4} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ et $\sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
3. Calculer $\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
4. Donner la nature et la somme de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Exercice 4 :

1. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$,
$$\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = \ln(n-1) - \ln(n)$$
(b) En déduire que pour tout $k \geqslant 2$: $\sum_{n=2}^{k} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = -\ln(k)$
(c) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$
2. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$,
$$\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$
(b) En utilisant le télescopage, calculer $\sum_{n=0}^{5} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.
(c) En déduire que pour tout $k \geqslant 2$: $\sum_{n=0}^{k} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln(2)$.
(d) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

Ex 2 1) a=1 et b=-1

3. Calculer $\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

4. Donner la nature et la somme de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+2} = 0$$

Donc la série converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1$$

Ex 3

Exercice 3 : Le but de cette question est de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge.

1. Déterminer a, b et c tels que :

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$

$$\frac{a(n+1)(n+2)+bn(n+2)+cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{a(n^2+2n+n+2)+bn^2+2bn+cn^2+cn}{n(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{(a+b+c)n^2+(3a+2b+c)n+2a}{n(n+1)(n+2)}$$

Par identification :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 2a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1/2 \\ b+c=-0,5 \\ 2b+c=-1,5 \ L2-2L1->L1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b+c=-0,5 \\ -c=-0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ c=0,5 \end{cases}$$

Donc

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{0,5}{n} + \frac{-1}{n+1} + \frac{0,5}{n+2}$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{0,5}{n} + \frac{-1}{n+1} + \frac{0,5}{n+2}$$

(2)

$$\sum_{n=1}^{4} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{0,5}{1} + \frac{-1}{2} + \frac{0,5}{3} \quad (n=1)$$

$$+ \frac{0,5}{2} + \frac{-1}{3} + \frac{0,5}{4} \quad (n=2)$$

$$+ \frac{0,5}{3} + \frac{-1}{4} + \frac{0,5}{5} \quad (n=3)$$

$$+ \frac{0,5}{4} + \frac{-1}{5} + \frac{0,5}{6} \quad (n=4)$$

$$= 0,5 - \frac{1}{4} - \frac{0,5}{5} + \frac{0,5}{6}$$

$$= \frac{7}{30}$$

$$\sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{0,5}{2} + \frac{0,5}{5} - \frac{1}{5} + \frac{0,5}{6}$$

$$\frac{0,5}{5} - \frac{1}{6} + \frac{0,5}{7}$$

$(n = 5)$

$k+1$ $k+2$ $k+1$

$$= \frac{5}{21}$$

3. Calculer $\sum_{n=1}^{K} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{0,5}{k+1} - \frac{1}{k+1} + \frac{0,5}{k+2}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{0,5}{k+1} + \frac{0,5}{k+2}$$

(S)

et donc

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{4} - \frac{0,5}{k+1} + \frac{0,5}{k+2} = \frac{1}{4}$$

et

la série est convergente et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$$

(b) En déduire que pour tout $k \geqslant 2$: $\sum_{n=2}^{k} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = -\ln(k)$

$$\sum_{n=2}^{k} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=2}^{k} \ln(n-1) - \ln(n)$$

$$= \ln(1) - \ln(2) \qquad n=2$$

$$+ \ln(2) - \ln(3) \qquad n=3$$

$$\ln(3) - \ln(4) \qquad n=4$$

$$\ln(k-1) - \ln(k)$$

$$= -\ln(k)$$

Exercice 4 :

1. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$,

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ $\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = \ln(n-1) - \ln(n)$

ln(n-1)-ln(n)= $\ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n}{n} - \frac{1}{n}\right)$

$= \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

(c) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$

$\lim_{k\to+\infty} \ln(k) = +\infty$

la série est donc divergente