Exercice 1 :

Déterminer la nature des séries suivantes et préciser leur somme en cas de convergence

$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-3)^n}{5^n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{5^n}{3^{2n}}$ et $\sum_{n\geqslant 0} 0,01$

Exercice 2 : Le but de cette question est de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ converge.

1. Déterminer a et b tels que :
$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2}.$$
2. Calculer $\sum_{n=0}^{3} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ et $\sum_{n=0}^{4} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.
3. Calculer $\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.
4. Donner la nature et la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Exercice 3 : Le but de cette question est de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge.

1. Déterminer a, b et c tels que :
$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$
2. Calculer, en (d) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.
3. Calculer $\sum_{n=1}^{k} \frac{}{n(n+1)(n+2)}$.
4. Donner la nature et la somme de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Exercice 4 :

1. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$,
$$\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = \ln(n-1) - \ln(n)$$
(b) En déduire que pour tout $k \geqslant 2$: $\sum_{n=2}^{k} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = -\ln(k)$
(c) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$
2. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$,
$$\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$
(b) En utilisant le télescopage, calculer $\sum_{n=0}^{5} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.
(c) En déduire que pour tout $k \geqslant 2$: $\sum_{n=0}^{k} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln(2)$.
(d) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

ln(a)-ln(b)=ln(a/b)

2. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$,

$$\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)-\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

(b) En utilisant le télescopage, calculer $\sum_{n=2}^{5} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

(c) En déduire que pour tout $k \geqslant 2$: $\sum_{n=2}^{k} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-\ln(2)$.

(d) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

2a) $\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)-\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

$=\ln\left(\frac{\frac{n-1}{n}}{\frac{n}{n+1}}\right)=\ln\left(\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}\right)$

$=\ln\left(\frac{n^2+n-n-1}{n^2}\right)=\ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)$

$=\ln\left(\frac{n^2}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right)=\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

2. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$,

$$\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)-\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

(b) En utilisant le télescopage, calculer $\sum_{n=2}^{5} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

$$\sum_{n=2}^{5} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{5} \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$n=2$ $n=3$ $n=4$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) - \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) - \ln\left(\frac{4}{5}\right) + \ln\left(\frac{4}{5}\right) - \ln\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1/2}{5/6}\right) = \ln\left(\frac{1}{2} \times \frac{6}{5}\right) = \ln\left(\frac{3}{5}\right)$$

(d) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{n=2}^{k} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{k\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln(2)$$

$$\lim_{k\to+\infty} 1+\frac{1}{k} = 1$$

$$\lim_{X\to 1} \ln(X) = \ln(1) = 0$$

par composition

$$\lim_{k\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = 0$$

Donc la série converge et

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\ln(2)$$

(c) En déduire que pour tout $k \geqslant 2$: $\sum_{n=2}^{k} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln(2)$.

(d) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

$$\sum_{n=2}^{k} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{k} \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) - \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\cdots + \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) - \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{k}{k+1}}\right) = \ln\left(\frac{1}{2} \times \frac{k+1}{k}\right)$$

$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

$$= \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln(1) - \ln(2) + \ln(1+1/k)$$

$$= \ln(1+1/k) - \ln(2)$$

Exercice 5 : Soit $(u_n)_{n\geqslant 2}$ la suite définie pour tout $n \geqslant 2$ par

$$u_n = \frac{n}{n^2-1}$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$
2. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

Exercice 6 : Pour tout $k \geqslant 3$, on pose

$$S_k = \sum_{n=3}^{k} \frac{5}{4^n \ln(n)}$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$: $0 \leqslant \dfrac{5}{4^n \ln(n)} \leqslant \dfrac{5}{4^n}$.
2. En déduire que pour tout $k \geqslant 3$:

$$0 \leqslant S_k \leqslant \frac{5}{48}\left(1 - \frac{1}{4^{k-2}}\right).$$

3. En déduire que pour tout la suite $(S_k)_{k\geqslant 3}$ est majorée.
4. Étudier la monotonie de la suite $(S_k)_{k\geqslant 3}$.
5. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{5}{4^n \ln(n)}$ converge et que

$$0 \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \frac{5}{4^n \ln(n)} \leqslant \frac{5}{48}$$

Exercice 7 :

Pour tout $k \geqslant 1$, posons : $S_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}$.

1. Vérifier que pour tout $n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$.
2. En déduire que pour tout $k \geqslant 2$, $\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{k+1} \leqslant S_k \leqslant 2 - \dfrac{1}{k}$.
3. En déduire que la série $(S_k)_{k\geqslant 1}$ est majorée.
4. Étudier la monotonie de la suite $(S_k)_{k\geqslant 3}$. En déduire que la série $S_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}$ converge et que

$$\frac{3}{2} \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} \leqslant 2$$

Exercice 8 : On considère la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_k sa somme partielle d'indice k.

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Indication : Multiplier par l'expression conjuguée $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.

2. En déduire que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{k+1} - 1 \leqslant S_k.$$

3. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice 9 :

Donner la nature et éventuellement la somme de la série suivante :

$$\sum_{n\geqslant 3} 4 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n - 13\mathrm{e}^{-7n}$$

Exercice 5 : Soit $(u_n)_{n\geqslant 2}$ la suite définie pour tout $n \geqslant 2$ par

$$u_n = \frac{n}{n^2-1}$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n \geqslant \frac{1}{n}$
2. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

$$u_n - \frac{1}{n} = \frac{n}{n^2-1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{n^2 - (n^2-1)}{n(n^2-1)} = \frac{1}{n(n^2-1)}$$

comme $n \geqslant 2$ $n^2 - 1 \geqslant 0$

Donc $u_n - \frac{1}{n} \geqslant 0$ soit $u_n \geqslant \frac{1}{n}$

$u_n \geq \frac{1}{n}$

or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge

Donc $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge

aussi.

2. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

Exercice 6 : Pour tout $k \geqslant 3$, on pose

$$S_k = \sum_{n=3}^{k} \frac{5}{4^n \ln(n)}$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$: $0 \leqslant \frac{5}{4^n \ln(n)} \leqslant \frac{5}{4^n}$.
2. En déduire que pour tout $k \geqslant 3$:

$$0 \leqslant S_k \leqslant \frac{5}{48}\left(1 - \frac{1}{4^{k-2}}\right).$$

3. En déduire que pour tout la suite $(S_k)_{k\geqslant 3}$ est majorée.
4. Étudier la monotonie de la suite $(S_k)_{k\geqslant 3}$.
5. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{5}{4^n \ln(n)}$ converge et que

$$0 < \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{5}{4^n \ln(n)} \leqslant \frac{5}{48}$$

(1) Comme $\ln(n) > 0$ lorsque $n \geq 3$

$$\frac{5}{4^n \ln(n)} \geqslant 0$$

$\ln(n) > 1 \Leftrightarrow \ln(n) > \ln(e)$

$\Leftrightarrow n > e \approx 2{,}72$

or par hypothèse $n \geq 3 > e$

$4^n \ln(n) \geq 4^n \times 1 = 4^n$

la fonction inverse est décroissante donc en inversant les inégalités on a

$$\frac{5}{4^n \ln(n)} \leq \frac{5}{4^n}$$

on a

$$0 \leqslant \frac{5}{4^n \ln n} \leqslant \frac{5}{4^n}$$

pour $n \geq 3$

$$\sum_{n=3}^{k} 0 \leqslant \sum_{n=3}^{k} \frac{5}{4^n \ln(n)} \leqslant \sum_{n=3}^{k} \frac{5}{4^n}$$

Et on a bien

$$0 \leqslant S_k \leqslant \frac{5}{48}\left(1 - \frac{1}{4^{k-2}}\right)$$

(3) $1 - \frac{1}{4^{k-2}} \leqslant 1$ et donc

$$S_k \leqslant \frac{5}{48} \times 1 = 5/48$$

S_k est majorée par $\frac{5}{48}$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 3 : 0 \leqslant \dfrac{5}{4^n \ln(n)} \leqslant \dfrac{5}{4^n}$.
2. En déduire que pour tout $k \geqslant 3$:

$$0 \leqslant S_k \leqslant \frac{5}{48}\left(1 - \frac{1}{4^{k-2}}\right).$$

$$\sum_{n=3}^{k} \frac{5}{4^n} = 5 \sum_{n=3}^{k} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$= 5 \times 1^{\text{er}}\text{ terme} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\text{nbre de termes}}}{1 - \frac{1}{4}}$$

Nbre de terme de 3 à 10

3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10

$10 - 3 + 1$

1^{er} terme $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$

$$\sum_{n=3}^{k} \frac{5}{4^n \ln(n)} = 5 \times \frac{1}{64} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{k-2}}{1 - 1/4}$$

$$= 5 \times \frac{1}{64 \times \frac{3}{4}} \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{k-2}\right)$$

$$= \frac{5}{48}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{k-2}\right) = \frac{5}{48}\left(1 - \frac{1}{4^{k-2}}\right)$$

④

$$S_{k+1} - S_k = \sum_{n=3}^{k+1} \frac{5}{4^n \ln(n)} - \sum_{n=3}^{k} \frac{5}{4^n \ln(n)}$$

$$= \frac{5}{4^3 \ln(3)} + \frac{5}{4^4 \ln(4)} + \cdots + \frac{5}{4^k \ln(k)} + \frac{5}{4^{k+1} \ln(k+1)}$$

$$- \frac{5}{4^3 \ln 3} - \frac{5}{4^4 \ln 4} - \cdots - \frac{5}{4^k \ln(k)}$$

S_{k+1} − S_k

$$= \frac{5}{4^{k+1} \ln(k+1)} > 0$$

Etalons $(S_k)_{k \geq 3}$ est croissante

④ La suite $(S_k)_{k \geq 3}$ est croissante et majoré Donc elle converge par le théorème des suites monotones

⑤ Comme $(S_k)_{k \geq 3}$ converge

$$\sum_{n \geq 3} \frac{5}{4^n \ln(n)}$$ converge

ch

$$0 \leq \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{5}{\varphi^n \ln(n)} \leq \frac{5}{48}$$