Interrogation de cours du 14 octobre. Sujet 1
Sans calculatrice évidemment !

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

X \ Y	0	1	2
1	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
3	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

1. Vérifier que nous disposons bien d'une loi de probabilité.

   .....

   .....

2. Déterminer les lois marginales de X et Y .

3. Calculer $E[X]$ et $E[Y]$.

   .....

   .....

4. Calculer $V[X]$ et $V[Y]$.

   .....

   .....

5. Calculer $Cov(X,Y)$.

   .....

   .....

6. X et Y sont-elles indépendantes. Justifier la réponse.

Interrogation de cours du 13 octobre. Sujet 2
Sans calculatrice évidemment !

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

X \ Y	0	1	2
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
3	$\frac{3}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

1. Vérifier que nous disposons bien d'une loi de probabilité.

   .....

   .....

2. Déterminer les lois marginales de X et Y .

3. Calculer $E[X]$ et $E[Y]$.

   .....

   .....

4. Calculer $V[X]$ et $V[Y]$.

   .....

   .....

5. Calculer $Cov(X,Y)$.

   .....

   .....

6. X et Y sont-elles indépendantes. Justifier la réponse.

1. Toutes les valeurs sont comprises entre 0 et 1 et nous avons

$$\frac{1}{12}+0+\frac{1}{12}+\frac{2}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{3}{12}+\frac{2}{12}+\frac{1}{12}=\frac{12}{12}=1.$$

nous disposons bien d'une loi de probabilité.

2. La loi marginale de X est donnée en additionnant les termes de chaque lignes de la loi conjointe (X,Y) et la loi marginal Y en additionnant les termes de chaque colonne. Nous avons :

$X=k$	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$	$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

et

$Y=k$	0	1	2
$P(Y=k)$	$\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$	$\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

3. Nous avons

$$E[X]=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{2}=\boxed{\frac{7}{3}}$$

et $E[Y]=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}=\boxed{\frac{3}{4}}$.

4. Par la formule de König-Huygins :

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{2}-\frac{49}{9}=\boxed{\frac{5}{9}}$$

et

$$V(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=0^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{4}-\frac{9}{16}=\boxed{\frac{11}{16}}$$

5. Nous avons par la formule de König-Huygins

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=1\times2\times\frac{1}{12}+2\times1\times\frac{1}{12}+2\times2\times\frac{1}{12}+3\times1\times\frac{2}{12}+3\times2\times\frac{1}{12}-\frac{7}{3}\times\frac{3}{4}=\boxed{-\frac{1}{12}}$$

6. La covariance n'est pas nulle, X et Y ne sont pas indépendantes.

1. Toutes les valeurs sont comprises entre 0 et 1 et nous avons $\frac{1}{12}+\frac{2}{12}+\frac{1}{12}+\frac{2}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{3}{12}+0+\frac{1}{12}=\frac{12}{12}=1$. nous disposons bien d'une loi de probabilité.
2. La loi marginale de X est donnée en additionnant les termes de chaque lignes de la loi conjointe (X,Y) et la loi marginal Y en additionnant les termes de chaque colonne. Nous avons :

$X=k$	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$	$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

et

$Y=k$	0	1	2
$P(Y=k)$	$\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$	$\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

3. Nous avons
$$E[X]=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3}=\boxed{2}$$
et $E[Y]=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}=\boxed{\frac{3}{4}}$.
4. Par la formule de König-Huygins :
$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{3}-4=\boxed{\frac{2}{3}}$$
et
$$V(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=0^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{4}-\frac{9}{16}=\boxed{\frac{11}{16}}$$
5. Nous avons par la formule de König-Huygins
$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=1\times1\times\frac{2}{12}+1\times2\times\frac{1}{12}+2\times1\times\frac{1}{12}+2\times2\times\frac{1}{12}+3\times2\times\frac{1}{12}-2\times\frac{3}{4}=\boxed{-\frac{1}{6}}$$
6. La covariance n'est pas nulle, X et Y ne sont pas indépendantes.