**Exercice 1** : Le nombre de pannes journalières d'une machine est une variable aléatoire $X$ dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant.

| $X = x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | 0.4 | 0.25 | 0.15 | 0.1 | 0.05 | 0.035 | 0.015 |

1. Quelle est la fonction de répartition de $X$ ? En donner une représentation graphique.
2. Quelle est la probabilité que la machine ait strictement plus de trois pannes ?
3. Trouver $x_0$ tel que $P(X \leqslant x_0) = 0.8$ et $x_1$ tel que $P(X \geqslant x_1) = 0.35$.
4. Calculer $E(X)$.

**Exercice 2** : (concours)

Un professeur interroge ses élèves en posant une liste de vingt questions. Pour chaque question, il y a trois réponses possibles, une seule étant la bonne réponse. L'élève A répond au questionnaire. On suppose que :

— L'élève A ne connaît que 60% de son cours, c'est-à-dire que pour chaque question, la probabilité qu'il connaisse la réponse est $\frac{60}{100}$.

— Lorsqu'il ne connaît pas une réponse à une question, il répond au hasard.

— Les questions posées sont mutuellement indépendantes.

On considère les événements

- $R$ : « l'élève A connaît la réponse à la première question »,
- $J$ : « l'élève A répond juste à la première question ».

1. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que $P(J) = \frac{11}{15}$.
2. Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de réponses exactes données par l'élève aux vingt questions.
   Reconnaître la loi de $X$ . On donnera les valeurs prises par $X$ et, pour chacune de ces valeurs $k$, la valeur de $P(X = k)$.
3. Donner $E(X)$ et $V(X)$ l'espérance et la variance de $X$.
4. Pour sanctionner les choix faits au hasard, le professeur décide d'accorder un point par réponse exacte et de retirer deux points par réponse fausse. Soit $N$ la variable aléatoire égale à la note obtenue par l'élève A.
   (a) Justifier l'égalité $N = 3X - 40$.
   (b) En déduire l'espérance de $N$ ainsi que sa variance.
   (c) L'élève B répond lui aussi au questionnaire. On suppose que comme l'élève A, il ne connaît que 60% de son cours. Mais il choisit de ne répondre qu'aux questions dont il connaît la réponse. Soit $Y$ la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses de l'élève B.
      i. Déterminer la loi de $Y$ .
      ii. En déduire la note que l'élève B obtient en moyenne.
      iii. En moyenne, entre l'élève A et l'élève B, quelle est la meilleure stratégie pour obtenir une bonne note ?

**Exercice 3** :

Une urne contient au départ une boule rouge et une boule noire. On effectue des tirages d'une boule avec remise jusqu'à l'obtention d'une boule noire, en rajoutant à chaque tirage une boule rouge supplémentaire. On note $X$ la variable aléatoire correspondant au numéro du tirage final où apparaît une boule noire.

1. Déterminer $X(\Omega)$ et la loi de $X$.
2. (a) Montrer que :
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$
(b) Montrer que
$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = 1.$$

**Exercice 4** : Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X=k) = a3^{-k}.$$

1. Déterminer $a$ pour qu'on définisse bien une loi de probabilité.
2. $X$ a-t-elle plus de chance de prendre des valeurs paires ou impaires ?

**Exercice 5** : (concours)

Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout entier $n$ non nul,

$$P(X>n) \neq 0.$$

On dit que $X$ vérifie la propriété d'absence de mémoire lorsque

$$\forall n \geqslant 1, \forall m \geqslant 1, P_{[X>n]}(X > n+m) = P(X>m).$$

1. (a) **Question de cours** : Donner la définition d'une suite géométrique.
(b) Quelles sont les suites géométriques admettant une limite finie ?
2. Soit $T$ une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre $p \in ]0;1[$. Établir que $T$ vérifie la propriété d'absence de mémoire.
3. Soit $S$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant la propriété d'absence de mémoire. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = P(S>n)$.
(a) Établir que
$$\forall n \geqslant 1,\ \forall m \geqslant 1, u_{n+m} = u_n u_m.$$
(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique.
(c) Exprimer $P(S=n)$ en fonction de certains termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
(d) En déduire que la variable aléatoire S suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
(e) Quel résultat a-t-on démontré ?

**Exercice 6** : (concours)

Une urne contient une boule blanche et deux boules noires. On effectue une succession de tirages avec remise dans cette urne, jusqu'à ce qu'on ait obtenu au moins une fois une boule blanche et une boule noire. On note $X$ le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche. On note $T$ la variable aléatoire désignant le nombre de tirages effectués. (On rappelle que les tirages s'arrêtent dès qu'on a obtenu une boule blanche et une boule noire.)

On notera aussi pour $j \in \mathbb{N}^*$, $N_j$ l'événement : « le j-ième tirage donne une boule noire ».

1. **Question de cours** : Loi géométrique de paramètre $p \in ]0;1[$ : protocole, loi, espérance et variance.
2. Déterminer la loi de $X$ , son espérance et sa variance.
3. (a) Déterminer $T(\Omega)$ et calculer $P(T=2)$.
(b) À l'aide du système complet d'événements $\{N_1, \overline{N_1}\}$ calculer $P(T=k)$ pour $k \in T(\Omega)$.

4. La variable $e^X$ admet-elle une espérance.

On note $U$ la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches au moment où on s'arrête. Par exemple, si les tirages ont donné successivement : une boule noire, une boule noire, une boule noire et une boule blanche, alors $T = 4$ et $U = 1$.

5. (a) Déterminer $U(\Omega)$.
   (b) Calculer $P(U = 1)$. Les variables aléatoires $U$ et $T$ sont-elles indépendantes ?

Fonction de répartition de la loi de Poisson de Paramètre $\lambda$

Par exemple, si $U$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$, alors $P(U \leqslant 4) = 0.815$

| $k \setminus \lambda$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.368 | 0.135 | 0.050 | 0.018 | 0.007 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 1 | 0.736 | 0.406 | 0.199 | 0.092 | 0.040 | 0.017 | 0.007 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 2 | 0.920 | 0.677 | 0.423 | 0.238 | 0.0125 | 0.062 | 0.030 | 0.014 | 0.006 | 0.003 |
| 3 | 0.981 | 0.857 | 0.647 | 0.433 | 0.265 | 0.151 | 0.082 | 0.042 | 0.021 | 0.010 |
| 4 | 0.996 | 0.947 | 0.815 | 0.629 | 0.440 | 0.285 | 0.173 | 0.100 | 0.055 | 0.030 |
| 5 | 0.999 | 0.983 | 0.916 | 0.785 | 0.616 | 0.446 | 0.301 | 0.191 | 0.116 | 0.067 |
| 6 | 1 | 0.995 | 0.996 | 0.889 | 0.762 | 0.606 | 0.450 | 0.313 | 0.207 | 0.130 |
| 7 | 1 | 0.999 | 0.988 | 0.949 | 0.867 | 0.744 | 0.599 | 0.453 | 0.324 | 0.220 |
| 8 | 1 | 1 | 0.996 | 0.979 | 0.932 | 0.847 | 0.729 | 0.593 | 0.456 | 0.333 |
| 9 | 1 | 1 | 0.999 | 0.992 | 0.968 | 0.916 | 0.830 | 0.717 | 0.587 | 0.458 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 0.997 | 0.986 | 0.957 | 0.901 | 0.816 | 0.706 | 0.583 |

**Exercice 7** :

Soit $X$ une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 4$. En utilisant la table ci-dessous donner :

1. $P(X = 0)$ ;
2. $P(X \leqslant 5)$ ;
3. $P(X = 3)$ :
4. $P(2 \leqslant X \leqslant 6)$.

**Exercice 8** :

Tous les résultats numériques seront donnés à 0.01 près.

Sur le marché du travail de l'agglomération caennaise, le nombre moyen de changements d'emploi d'un ouvrier dans une période de 5 ans est de deux. Sachant que le nombre de changements d'emploi en 5 ans suit une loi de Poisson, calculer les probabilité suivantes :

1. la probabilité qu'un travailleur ne fasse aucun changement pendant 5 ans,
2. la probabilité qu'un travailleur fasse au moins un changement,
3. la probabilité qu'il fasse plus d'un changement, mais moins de cinq (1 et 5 exclus). Vous donnerez le résultat exact et approchée
   Indication numérique : $e^{-2} \approx 0.14$. Ou bien utiliser la table ci-dessus.

**Exercice 9** : **Partie I : Etude de 100 appels.**

On suppose dans cette partie que le serveur vocal reçoit 100 appels. On suppose que 5% de ces appels concernent le produit $A$ et que 95% concernent le produit $B$. On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre d'appels concernant le produit $A$ au cours des 100 appels reçus.

1. (a) Donner la loi de $X$, on précisera $X(\Omega)$ ainsi que $P(X = k)$ pour $k \in X(\Omega)$.
   *Une réponse argumentée est attendue.*
   (b) Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire $X$.

2. On suppose que chaque appel concernant le produit $A$ permet à la société d'engranger un bénéfice net de 95 euros, et que chaque appel le produit $B$ permet à la société d'engranger un bénéfice net de 5 euros. On note $Y$ la variable aléatoire égale au bénéfice total de la société pour 100 appels.
   Justifier que $Y = 90X + 500$. En déduire l'espérance et la variance de la variable $Y$.
3. On suppose que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $X$ par la loi de Poisson de paramètre $\lambda$ d'une variable aléatoire ayant la même espérance que $X$.
   (a) Déterminer la valeur de $\lambda$ de cette loi de Poisson.
   (b) A l'aide de la table de valeurs ci-dessus, déterminer une valeur approchée de $P(X \geqslant 10)$.

**Partie II : Etude de la première série d'appels.**

On suppose dans cette partie que le serveur reçoit une infinité d'appels consécutifs. On suppose que 20% des appels concernent le produit $A$ et 80% le produit $B$. On dit que le serveur reçoit une première série de longueur $n$ si les $n$ premiers appels concernent le même produit et si le $(n+1)^{\text{ème}}$ appel concerne l'autre produit. On note :

$X_A$ la variable aléatoire égale au nombre d'appels nécessaires pour obtenir le premier appel concernant le produit $A$.

$X_B$ la variable aléatoire égale au nombre d'appels nécessaires pour obtenir le premier appel concernant le produit $B$.

$L$ la longueur de la première série d'appels.

Ainsi si les 3 premiers appels concernent le produit $A$, les deux suivants le produit $B$, les 4 suivants le produit $A$, que l'on symbolisera par $AAABBAAAA$..., on aura $X_A = 1$, $X_B = 4$ et $L = 3$.

1. (a) Donner la loi de $X_A$. On précisera $X_A(\Omega)$ ainsi que $P(X_A = k)$ pour $k \in X_A(\Omega)$.
   *Une réponse argumentée est attendue.*
   (b) Donner l'espérance $E(X_A)$ et la variance $V(X_A)$ de $X_A$ et en déduire l'espérance de $X_A^2$ notée $E(X_A^2)$.
   (c) Donner la loi de $X_B$, son espérance $E(X_B)$ et sa variance $V(X_B)$. En déduire l'espérance de $X_B^2$ notée $E(X_B^2)$.
2. Soit $n$ un entier naturel non nul.
   (a) Écrire les événements $[L = n] \cap [X_A = n+1]$ et $[L = n] \cap [X_B = n+1]$ à l'aide d'une succession de lettres $A$ et $B$.
   (b) En déduire l'expression de $P(L = n)$ en fonction de $n$ et vérifier que :
   $$\forall n \geqslant 1,\ P(L = n) = 0,8 \times P(X_A = n) + 0,2 \times P(X_B = n).$$
3. À l'aide des questions précédentes, démontrer que les espérances de $L$ et $L^2$ sont données par :
   $$E(L) = 0,8 \times E(X_A) + 0,2 \times E(X_B).$$
   $$E(L^2) = 0,8 \times E(X_A^2) + 0,2 \times E(X_B^2).$$
   En déduire l'espérance et la variance de $L$.