Chapitre 4 : séries numériques

1 Convergences

1.1 Notions de séries

Définition 1 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Appelons **série de terme général** u_n la suite $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ S_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_k = \sum_{n=0}^{k} u_n$$

La série de terme général u_n est notée $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ ou parfois simplement $\sum u_n$

Le réel $S_k = \sum_{n=0}^{k} u_n$ est appelé **somme partielle d'indice k de la série** $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

Remarque : Si la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ n'est définie qu'à partir d'un certain rang n_0, la série de terme général u_n n'est également définie qu'à partir de n_0, ce que nous notons note $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$. La suite des sommes partielles est alors notée $(S_k)_{k\geqslant n_0}$, avec $S_k = \sum_{k=n_0}^{k} u_n$.

Exemple 1 :

Nous considérons la série $\sum_{n\geqslant 0} n$. Son terme général est donné par $u_n = n$

Les premières sommes partielles sont données par :

$S_0 = 0$, $S_1 = 1$, $S_2 = 1+2 = 3$ et $S_3 = 1+2+3 = 6$ De manière générale, nous pouvons montrer montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ S_k = \frac{k(k+1)}{2}$$

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ s'appelle la **série harmonique**. Son terme général est donné par $u_n = \frac{1}{n}$

$S_1 = 1$, $S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$ et $S_4 = \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$.

Il n'existe pas de formule simple pour exprimer la somme partielle S_k d'indice k.

1.2 Séries convergentes.

Définition 2 :

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série numérique et soit $(S_k)_{k\geqslant 0}$ la suite des sommes partielles d'indice k de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

Si la $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, nous dirons que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ **converge** et nous notons

$$S = \lim_{k\to+\infty} S_k = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{k} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Si la $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ diverge, nous dirons que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ **diverge**

Déterminer la **nature d'une série** consiste à déterminer si celle-ci est convergente ou divergente.

Remarques :

La notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ n'a de sens que si la série est convergente.

Les sommes infinies ne se manipulent pas comme les sommes finies (puisqu'en réalité ce sont des limites, il faut donc toujours s'assurer de la convergence). C'est pourquoi nous calculons (presque) toujours les sommes partielles, qui sont des sommes finies, avant de passer à la la limite.

Exemple 2 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_n = 0$. Alors la somme partielle d'indice k est :

$S_k = 0+0+\cdots+0 = 0$

$(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 Donc la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est converge et vaut 0.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_n = 1$. Alors la somme partielle d'indice k est

$S_k = 1+k$

$(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ Donc la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Alors la somme partielle d'indice k est est une somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

$$S_k = \text{Premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q} = 1 \times \frac{1-0.5^{k+1}}{1-0.5} = 2-0.5^k$$

Comme $0.5 \in]-1;1[$, $\lim_{k\to+\infty} 0.5^k = 0$ et $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.

Donc la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge et sa limite est égale à 2.

Considérons la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$

Son terme général est donné par $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Pour la somme partielle d'indice k, nous commençons par remarquer que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1+n-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Alors par *télescopage*, la somme partielle d'indice 5 est

$$S_5 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{6}$$

Puis la somme partielle d'indice k est

$$S_k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1}$$

La limite de $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc 1

Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et sa limite est égale à 1.

Une autre preuve consiste à écrire les sommes suivantes :

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{k+1} \frac{1}{n} = 1 + \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

La preuve est plus rigoureuse mais demande une bonne maitrise du symbole $\sum$.

Exemple 3 : La série harmonique est divergente. Prouvons le :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots \\
&\geqslant 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{=\frac{1}{2}} + \frac{1}{16} \cdots \\
&\geqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots
\end{aligned}$$

En effet il y a 2 termes égaux à $\frac{1}{4}$, qui additionnés donnent $\frac{1}{2}$.

Il y a 4 termes égaux à $\frac{1}{8}$, qui additionnés donnent $4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$.

Il y a 8 termes égaux à $\frac{1}{16}$, qui additionnés donnent $8 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$, et ainsi de suite. En ajoutant une infinité de fois le terme $\frac{1}{2}$, la divergence de la somme est évidente. Et puisque la série harmonique est plus grande, alors elle diverge.

2 Sommes de séries

2.1 Opérations sur les séries

Les opérations sur les sommes finies se transposent, sous certaines conditions, aux séries.

Théorème 1 : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles et λ un réel non nul.

— Les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \lambda u_n$ sont de même nature (c'est-à-dire qu'elles sont ou bien toutes les deux convergentes, ou bien toutes les deux divergentes). Si elles sont convergentes, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$$

— Si les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ sont toutes les deux convergentes, alors la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+w_n)$ est également convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+w_n)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n+\sum_{n=0}^{+\infty}w_n.$$

⚠ La réciproque du second point n'est pas vraie! La convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+w_n)$ n'assure pas **DU TOUT** la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} w_n$

Exemple 4 :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n=\frac{1}{n}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $w_n=-\frac{1}{n}$ alors :
$\sum_{n\geqslant 1} u_n+w_n=\sum_{n\geqslant 1} 0=0$, mais évidemment ni
$\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} w_n$ convergent puisque c'est des séries harmoniques.

2.2 Suites et séries

Théorème 2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$ converge. Dès lors, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, en notant ℓ sa limite, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n)=\ell-u_0.$$

Théorème 3 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge alors $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$.

⚠ La réciproque n'est pas vraie! Si $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$ la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ peut diverger. Par exemple la série harmonique.

2.3 Séries géométriques

Définition 3 : Pour tout réel q, la série $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ s'appelle la **série géométrique de raison q.**

Exemple 5 :

Nous avons montré précédemment que la série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ converge et que sa somme vaut 2.

Théorème 4 : Soit q un réel, la série $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ converge si et seulement si $-1 < q < 1$ et alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Exemple 6 : Déterminer la convergence et la somme éventuelle de $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Nous avons :

$$\sum_{n=0}^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \text{Premier terme} \times \frac{1-q^{\text{Nombre de termes}}}{1-q} = 1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{3}}$$

Or $-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc $\lim_{k\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} = 0$. La série $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge et sa limite vaut $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}}$.

Proposition 5 :

Soit q un réel, la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_0 q^n$ converge si et seulement si $-1 < q < 1$.

Si la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_0 q^n$ converge alors :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_0 q^n = \frac{u_0 q^{n_0}}{1-q}.$$

Exemple 7 : Déterminer la convergence et la somme éventuelle de $\sum_{n\geqslant 3} 5\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Par linéarité : $\sum_{n\geqslant 3} 5\left(\frac{1}{2}\right)^n = 5\sum_{n\geqslant 3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Or

$$\sum_{n\geqslant 3} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une série géométrique de raison $0.5 \in]-1;1[$ donc converge vers $\frac{1}{1-0.5} = 2$.

Et $\sum_{n=0}^{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + 0.5 + 0.25 = 1.75$. Donc $\sum_{n\geqslant 3} 5\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge et est égale à $\boxed{5(2-1.75) = 5 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4}}$.

Méthode : Étudier la nature d'une série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et/ou calculer sa somme éventuelle

1. Nous regardons si le terme général tend vers 0 :
   - Si la réponse est non, la série est divergente.
   - Si la réponse est oui, nous ne pouvons pas conclure, il faut poursuivre l'étude.
2. Nous essayons d'exprimer la série à l'aide d'une (ou plusieurs) série géométrique.
3. Si ce n'est pas possible, nous poursuivons l'étude en écrivant la somme partielle $S_k = \sum_{n=0}^{k} u_n$
   Nous regardons si nous pouvons simplifier S_k, en utilisant un changement d'indice, une mise en facteur ou un « télescopage des termes ». Puis nous concluons à l'aide des résultats de convergence des suites.

Exemple 8 : Déterminer la convergence et la somme éventuelle de $\sum_{n\geqslant 0} 5\left(\frac{1}{2}\right)^{3n+4}$.

Nous avons par propriétés sur les puissances et linéarité :

$$\sum_{n\geqslant 0} 5\left(\frac{1}{2}\right)^{3n+4} = \sum_{n\geqslant 0} 5\times\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\times\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\right)^{n} = \frac{5}{16}\sum_{n\geqslant 0}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\right)^{n}$$

La série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^{3n}$ est une série géométrique de raison $0.5^3 \in]-1;1[$ donc converge vers $\frac{1}{1-0.5^3} = \frac{8}{7}$.

La série $\sum_{n\geqslant 0} 5\left(\frac{1}{2}\right)^{3n+4}$ converge donc et est égale à $\frac{5}{16}\times\frac{8}{7} = \boxed{\frac{5}{14}}$.