Variables aléatoires discrètes

1 Généralités sur les variables aléatoires

1.1 Espace probabilisé

Étant donné une expérience aléatoire, pour calculer des probabilités,

1. Nous commençons par déterminer l'univers Ω de toutes les issues possibles de cette expérience aléatoire. Cet ensemble peut être fini ou infini.

   Exemple 1 :

   — Si l'expérience consiste à lancer un dé à 6 faces et à observer le numéro obtenu, alors $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

   — Si l'expérience consiste à lancer une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, alors $\Omega = \{P, FP, FFP, \cdots, F^kP, \cdots\}$. Il faut au moins un lancer pour avoir un succès mais ensuite il peut falloir de $1,2,\cdots$ lancers pour avoir un succès.

   — Si l'expérience consiste à observer la durée de vie d'une ampoule, alors $\Omega = \mathbb{R}_+$. la durée étant un réel positif.

2. Nous déterminons ensuite une probabilité sur Ω, c'est-à-dire une application P qui à un évènement de Ω (i.e. un sous-ensemble) associe un réel, compris entre 0 et 1, qui mesure la « chance de réalisation » de cet évènement.

Remarque :

Nous simplifions dans ce cours la notion d'espace probabilisé par rapport à un cours de M1 probabilité.

Commençons par rappeler quelques propriétés, vues en première année dans le cas d'un univers fini, et qui restent vraies dans le cas d'un univers infini

Proposition 1 :

Soient Ω un espace probabilisé et A, B deux évènements. Nous avons les résultats suivants :

- $P(\Omega) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- Si A et B sont incompatibles (c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$) alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

1.2 Évènements associés à une variable aléatoire

Définition 1 :

Soit X une variable aléatoire sur Ω et $x \in \mathbb{R}$. Notons

$$[X = x] = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\},$$

$$[X < x] = \{\omega \in \Omega | X(\omega) < x\}, \quad [X > x] = \{\omega \in \Omega | X(\omega) > x\},$$

$$[X \leqslant x] = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \leqslant x\}, [X \geqslant x] = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \geqslant x\}.$$

Si x et y sont deux réels tels que $x < y$, alors notons

$$[x \leqslant X \leqslant y] = \{\omega \in \Omega | x \leqslant X(\omega) \leqslant y\}$$

Plus généralement, si I désigne une partie de $\mathbb{R}$, notons

$$[X \in I] = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in I\}.$$

Exemple 2 : Nous lançons un dé équilibré et nous notons X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir 6. X est une variable aléatoire et $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ (il faut au moins un lancer pour obtenir 6).

Nous avons : $P([X = 1]) = \dfrac{1}{6}$

$$P([X \leqslant 2]) = P([X = 1]) + P([X = 2]) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{11}{36}$$

Abus de notation : souvent pour éviter une lourdeur d'écriture nous écrirons $P(X \in I)$ au lieu de $P([X \in I])$,...

Définition 2 : Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit $\mathscr{P}(\Omega)$ las parties de Ω

Appelons **système complet d'événements** toute famille finie d'événements deux à deux incompatibles dont la réunion est Ω i.e. toute famille $(A_i)_{i \in n \in [\![1\ ;\ n]\!]} \in \mathscr{P}(\Omega)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ telle que :

$$\left(\forall (i, j) \in [\![1\ ;\ n]\!]^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset\right) \text{ et } \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

Proposition 2 : Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. Alors l'ensemble

$$\{[X = x] | x \in X(\Omega)\}$$

forme un système complet d'évènements. En particulier, nous avons

$$\sum_{x \in X(\Omega)} P([X = x]) = 1.$$

Exemple 3 :

Lançons un dé. Donner un système complet d'événements de l'univers de cette expérience aléatoire : $\Omega = \{\{1,2\},\{3\},\{4,5\},\{6\}\}$

Remarques :

— Lorsque $X(\Omega)$ est fini, la somme précédente est une somme finie. En effet, dans ce cas, $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \cdots; x_n\}$, et donc

$$\sum_{k=1}^{n} P([X = x_k]) = 1.$$

— Lorsque $X(\Omega)$ est dénombrable, la somme précédente est la somme d'une série convergente. En effet, $X(\Omega) = \{x_k;\ k \in \mathbb{N}\}$, et donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P([X = x_k]) = 1.$$

Exemple 4 : Nous lançons un dé équilibré et nous notons X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir 6. X est une variable aléatoire et $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Un système complet d'événements est :

$$\{[X = i] | \, i \in \mathbb{N}^*\}$$

2 Variables aléatoires discrètes

Définition 3 : Soit X une variable aléatoire sur Ω. Nous disons que

— X est une **variable aléatoire discrète** si son support $X(\Omega)$ est un ensemble discret, i.e. fini ou dénombrable.

— X est une **variable aléatoire discrète finie** si son support $X(\Omega)$ est un ensemble fini.

— X est une **variable aléatoire discrète infinie** si son support $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable.

Exemple 5 :

Nous lançons un dé équilibré et nous notons X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir 6. X est une variable aléatoire et $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Donc X est une variable aléatoire géométrique de paramètre $p = \frac{1}{6}$.

2.1 Loi d'une variable aléatoire discrète.

Définition 4 : Soit X une variable aléatoire sur Ω. Appelons **loi de la variable aléatoire** X la donnée des $P(X=x)$ pour tout réel x du support $X(\Omega)$.

Méthode : Donner la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

1. Nous donnons l'ensemble des valeurs $X(\Omega)$ des valeurs prises par X .
2. Nous calculons $P(X=x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$. Lorsque $X(\Omega)$ est fini, nous résumons souvent la loi sous la forme d'un tableau avec, sur la 1ère ligne les valeurs prises par X , et sur la 2ème ligne les probabilités correspondantes.

Exemple 6 : Un sac contient 5 jetons numérotés de 1 à 5. Pour jouer une partie, nous devons miser 1€. Nous tirons au hasard un jeton. Si nous avons le numéro 1, nous gagnons 4€, si nous avons un numéro pair nous recevons 2€ et rien sinon. Notons X le gain (algébrique). X est une variable aléatoire et $X(\Omega)=\{-1;1;3\}$. Donnons la loi de probabilité de X

$X=k$	-1	1	3
$P(X=k)$	0.4	0.4	0.2

Nous lançons un dé équilibré et nous notons X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir 6. X est une variable aléatoire et $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$. Nous avons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X=k)=\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\times\frac{1}{6}$$

2.2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète

Définition 5 : Soit X une variable aléatoire discrète sur (Ω,P).
Nous appelons **fonction de répartition de** X l'application :

$$\begin{array}{rccc} F_X: & \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ & x & \mapsto & P\big([X\leqslant x]\big). \end{array}$$

Théorème 3 : Soit X une variable aléatoire discrète finie sur (Ω,P).
Posons $X(\Omega)=\{x_1,\ldots,x_n\}$ avec $x_1<x_2<\ldots<x_n$.

1. $\forall a \in \mathbb{R}, P\big([X > a]\big) = 1 - F_X(a)$.
2. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, a < b \Rightarrow P\big([a < X \leqslant b]\big) = F_X(b) - F_X(a)$.
3. F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. $P\big([X = x_1]\big) = F_X(x_1)$ et $\forall k \in [\![2,n]\!], P\big([X = x_k]\big) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 \\ \sum_{i=1}^{k} P\big([X = x_i]\big) & \text{si } x \in [x_k, x_{k+1}[\text{ avec } k \in [\![1\ ;\ n-1]\!] \\ 1 & \text{si } x \geqslant x_n \end{cases}$.

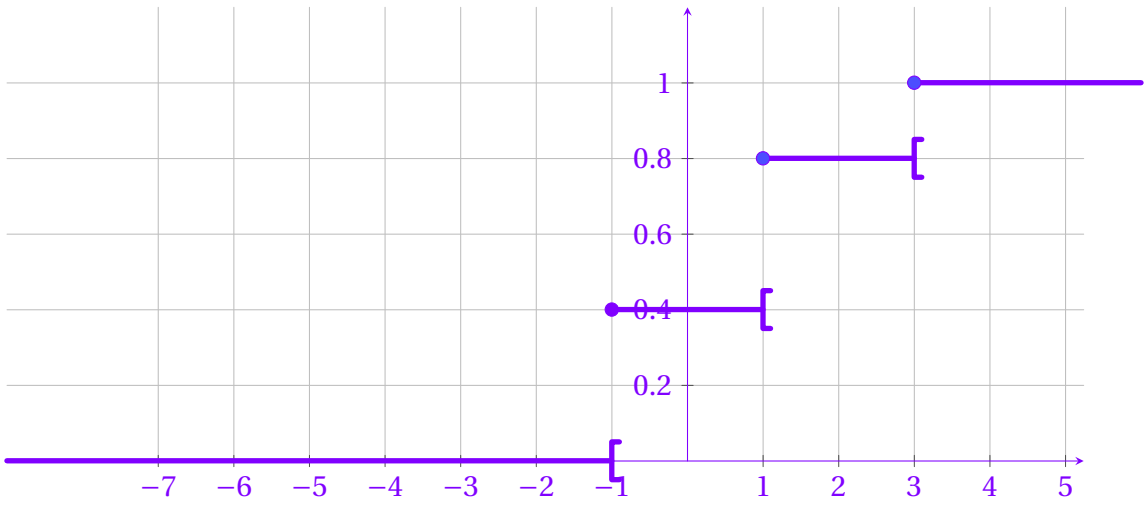
Remarque : F_X est une fonction en escalier qui est entièrement définie par la donnée des $F_X(x_i)$ pour $i \in [\![1,n]\!]$.

Exemple 7 :

Un sac contient 5 jetons numérotés de 1 à 5. Pour jouer une partie, nous devons miser 1€. Nous tirons au hasard un jeton. Si nous avons le numéro 1, nous gagnons 4€, si nous avons un numéro pair nous recevons 2€ et rien sinon. Notons X le gain (algébrique). X est une variable aléatoire et $X(\Omega) = \{-1;1;3\}$. Donnons la loi de probabilité de X. Définissez la fonction de répartition :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 0,4 & \text{si } x \in [-1\ ;\ 1[\\ 0,8 & \text{si } x \in [1\ ;\ 3[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

Sa représentation graphique est :



Remarque : La fonction de répartition d'une variable aléatoire X détermine parfaitement la loi de X . En effet, si deux variables aléatoires ont la même fonction de répartition alors elles suivent la même loi.

3 Moments d'une variable aléatoire discrète

3.1 Espérance d'une variable aléatoire discrète

Définition 6 : Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé (Ω, P).

— Si $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$

Appelons **espérance de** X le nombre réel : $E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \, P\big([X = x_k]\big)$.

— Si $X(\Omega) = \{x_k | k \in \mathbb{N}\}$ et que la série de terme général $x_n \, P(x_n)$ converge

Appelons **espérance de** X le nombre réel : $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \, P\big([X = x_k]\big)$.

Remarque : L'espérance en probabilité est la moyenne en statistique.

Exemple 8 : Un sac contient 5 jetons numérotés de 1 à 5. Pour jouer une partie, nous devons miser 1€. Nous tirons au hasard un jeton. Si nous avons le numéro 1, nous gagnons 4€, si nous avons un numéro pair nous recevons 2€ et rien sinon. Notons X le gain (algébrique). X est une variable aléatoire et $X(\Omega) = \{-1; 1; 3\}$. Rappelons que la loi de probabilité de X est :

$X = k$	-1	1	3
$P(X = k)$	$0,4$	$0,4$	$0,2$

Nous avons alors :

$$E(X) = -1 \times 0,4 + 1 \times 0,4 + 3 \times 0,2 = 0,6$$

Proposition 4 : (*linéarité de l'espérance*)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur Ω et admettant une espérance. Soient a et b deux réels. Alors, $X + Y$ et $aX + b$ admettent une espérance et

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad \text{et} \quad E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Exemple 9 : Nous lançons un dé non-truqué et nous notons X le numéro obtenu. Soit g la fonction définie par $g(x) = 2x + 3$ et $Y = g(X) = 2X + 3$. Calculons $E(Y)$.

La loi de X est la loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$

Donc $E(X) = \dfrac{1+6}{2} = 3,5$

Et par linéarité de l'espérance : $E(Y) = 2E(X) + 3 = 2 \times 3.5 + 3 + 10$.

Théorème 5 : (*théorème de transfert*)

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé (Ω, P) et f une fonction réelle définie sur $X(\Omega)$. Alors, la variable aléatoire $f(X)$ admet une espérance si et seulement si la série de terme général $|f(x_n)|P(X = x_n)$ est convergente.

Nous avons alors :

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\, P\big([X = x]\big).$$

Remarques :

— Si X est une variable aléatoire discrète finie, alors I est fini, donc l'espérance de $g(X)$ existe et la somme intervenant dans sa définition est une somme finie.

— Le théorème de transfert montre que pour calculer l'espérance de $g(X)$, il est inutile de déterminer la loi de $g(X)$: il suffit de connaître la loi de X .

Exemple 10 : Un sac contient 5 jetons numérotés de 1 à 5. Pour jouer une partie, nous devons miser 1€. Nous tirons au hasard un jeton. Si nous avons le numéro 1, nous gagnons 4€, si nous avons un numéro pair nous recevons 2€ et rien sinon. Notons X le gain (algébrique). X est une variable aléatoire et $X(\Omega) = \{-1; 1; 3\}$. Rappelons que la loi de probabilité de X est :

$X = k$	-1	1	3
$P(X = k)$	$0,4$	$0,4$	$0,2$

Nous avons alors par le théorème du transfert :

$$E(X^2) = (-1)^2 \times 0,4 + 1^2 \times 0,4 + 3^2 \times 0,2 = 2,6$$

et

$$E(X^3) = (-1)^3 \times 0,4 + 1^3 \times 0,4 + 3^3 \times 0,2 = 5,4.$$

3.2 Variance d'une variable aléatoire discrète

Définition 7 : Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé (Ω, P).

— Si $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$

Nous appelons **variance de** X le nombre réel : $V(X) = \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - E(X)\big)^2\, P\big([X = x_k]\big)$.

— Si $X(\Omega) = \{x_k | k \in \mathbb{N}\}$ et que la série de terme général $\big(x_k - E(X)\big)^2\, P(x_n)$ converge.

Nous appelons **variance de** X le nombre réel : $V(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \big(x_k - E(X)\big)^2\, P\big([X = x_k]\big)$.

Remarques :

— Sous réserve d'existence, $V(X) = E\big(X - E(X)\big)^2$.

— La variance, si elle existe, est un réel positif ou nul.

— La variance mesure la dispersion de la variable aléatoire par rapport à son espérance.

Théorème 6 : *(formule de Kœnig-Huygens)*

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé (Ω, P).
Si $E(X^2)$ existe, alors nous avons

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = \left(\sum_{x \in X(\Omega)} x^2 P\big([X = x]\big)\right) - E(X)^2.$$

Méthode : Répondre à la question « X admet-elle une variance? Si oui, la calculer. »

1. Si X n'admet pas d'espérance, alors elle n'admet pas de variance.
2. Si X admet une espérance, il faut regarder si $E(X^2)$ existe (grâce au théorème de transfert).
   — Si non, alors X n'admet pas de variance.
   — Si oui, alors nous pouvons la calculer en utilisant la formule de Köenig-Huygens

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Exemple 11 : Un sac contient 5 jetons numérotés de 1 à 5. Pour jouer une partie, nous devons miser 1€. Nous tirons au hasard un jeton. Si nous avons le numéro 1, nous gagnons 4€, si nous avons un numéro pair nous recevons 2€ et rien sinon. Notons X le gain (algébrique). X est une variable aléatoire et $X(\Omega) = \{-1; 1; 3\}$. Rappelons que la loi de probabilité de X est :

$X = k$	-1	1	3
$P(X = k)$	$0,4$	$0,4$	$0,2$

Montrons que X admet une variance et calculons-là. Rappelons que $E(X) = 0,6$ et $E(X^2) = 2,6$.

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left((X - E(X))^2\right) = (-1 - 0.6)^2 \times 0,4 + (1 - 0.6)^2 \times 0,4 + (3 - 0.6)^2 \times 0,2 \\ &= 2,56 \times 0,4 + 0,16 \times 0,4 + 5,76 \times 0,2 = 2,24 \end{aligned}$$

Et par la formule de Kœnig-Huygens

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2,6 - 0,6^2 = 2,6 - 0,36 = 2,24$$

Théorème 7 : Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé (Ω, P).

1. $V(X) \geqslant 0$.
2. $V(X)$ est nulle si et seulement si X est une variable certaine.
3. $\forall a \in \mathbb{R}$, $V(aX) = a^2 V(X)$ **(caractère quadratique de la variance)**.
4. $\forall b \in \mathbb{R}$, $V(X+b) = V(X)$ **(invariance par translation)**.

Exemple 12 : Nous lançons un dé non-truqué et notons X le numéro obtenu. Soit $Y = 2X+3$. Calculons la variance de X puis celle de Y

$$E(X^2) = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{6} = \frac{91}{6}$$

$E(X) = 3,5$, D'où

$$V(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$$

Et $V(Y) = V(2X+3) = 2^2 \times \frac{35}{12} = \frac{35}{3}$.

Définition 8 : Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé fini.
Appelons **écart-type de** X le nombre réel : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Proposition 8 : Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé fini.
Nous avons : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$.

4 Lois discrètes infinies usuelles

Définition 9 : Une variable aléatoire X suit une **loi géométrique de paramètre** $p \in]0;1[$ lorsque : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X=k) = p(1-p)^{k-1}.$$

Nous notons $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Exemple 13 :

Nous lançons un dé. X donne la première fois où nous avons 6. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$.

Théorème 9 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.
Alors X admet une espérance et une variance et nous avons

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Méthode : **Justification qu'une variable aléatoire suit une géométrique et donner son paramètre**

Pour justifier qu'une variable aléatoire suit une loi géométrique, il suffit de vérifier que :

1. Nous répétons des expériences de Bernoulli identiques et indépendantes à deux issues (succès ou échec)
2. X compte le nombre de répétitions nécessaires avant d'obtenir le premier succès.
3. Le paramètre de la loi géométrique est la probabilité de succès lors de chacune des épreuves que nous répétons.

4.1 Loi de Poisson

Nous considérons une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

Définition 10 :

Soit $\Lambda in \mathbb{R}_*^+$. Une variable aléatoire discrète X suit **une loi de Poisson de paramètre** λ que nous notons $\mathscr{P}(\lambda)$ si et seulement si, pour tout entier naturel k :

$$P(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Théorème 10 : Si X est une variable aléatoire discrète qui suit une loi de Poisson de paramètre λ
Nous avons $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.

Remarque : **Utilisation d'une loi de Poisson**

Nous utilisons une loi de Poisson pour décrire des expériences du type :

— nombre d'appels reçus par un standard téléphonique pendant un temps donné ;

— nombre de pannes d'une machine pendant un temps donné.

— Une loi de Poisson n'intervient que pour des événements « rares ».