Nom : .....

Devoir numéro 2 de mathématiques de ECT2 : 4h

Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez.Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement.Toutes vos réponses doivent être justifiées, de manière claire et précise.Ce sujet comporte pages.Le sujet est volontairement trop long. Vous pouvez donc avoir une bonne note sans avoir tout traité!Dans le cas où vous repéreriez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalerez très lisiblement sur votre copie, proposerez la correction et poursuivrez l'épreuve en conséquence. De même si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.Bon courage!

Exercice 1 :

Considérons deux urnes U et V contenant deux jetons, l'un portant le numéro 0 et l'autre le numéro 1. Procédons à des échanges successifs de jetons. Plus précisément, lors de chaque étape, choisissons au hasard un jeton dans l'urne U et un dans l'urne V et nous les changeons d'urne.

Par exemple, si lors du premier échange nous choisissons le jeton 0 dans l'urne U et le jeton 1 dans l'urne V alors après échange, l'urne U contiendra deux jetons 1 et l'urne V deux jetons 0.

Pour tout entier naturel n, considérons les événements :

- A_n : « à l'issue de n échanges l'urne U contient deux jetons 0 ».
- B_n : « à l'issue de n échanges l'urne U contient un jeton 0 et un jeton 1 ».
- C_n : « à l'issue de n échanges l'urne U contient deux jetons 1 ».

Notons a_n, b_n et c_n les probabilités respectives de A_n, B_n et C_n. Au vu de la configuration initiale, nous pouvons dire que : $a_0 = c_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

1. Montrer que $a_1 = \frac{1}{4}$. Calculer de même b_1 et c_1.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $P_{A_n}(B_{n+1}) = 1$. Calculer de même $P_{B_n}(B_{n+1})$ et $P_{C_n}(B_{n+1})$.
   En déduire, en utilisant la formule des probabilités totales, que $b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n$.
3. Montrer de même que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons $a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$.
4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la valeur de $a_n + b_n + c_n$?
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $b_{n+1} = 1 - \frac{1}{2}b_n$.

Exercice 2 :

Notons $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Définissons les trois matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $T^2 = I_3 + N$.
2. Calculer N^2.
3. À l'aide du binôme de Newton, déterminer l'expression de T^{2n}.

   Indication : vous noterez que $T^{2n} = (T^2)^n = (I_3 + N)^n$
4. En déduire $T^{2n+1} = T^{2n} \times T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & n \\ 0 & 1 & 1+2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3 :

Soit n un entier naturel non nul.
Une urne contient des jetons à deux faces portant chacun sur une des faces un numéro bleu et sur l'autre face un numéro rouge.
Sur l'ensemble des jetons, nous avons, pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, exactement k jetons qui portent le numéro k bleu, l'autre face portant les numéros de 1 à k. Convenons de noter le jeton avec son numéro bleu en premier et son numéro rouge en second.
Ainsi lorsque $n = 2$, en notant en premier le numéro bleu et en second le numéro rouge, l'urne contient trois jetons :

— un jeton portant une face numéro 1 en bleu et une face numéro 1 en rouge, que nous notons $(1,1)$

— un jeton portant une face numéro 2 en bleu et une face numéro 1 en rouge, que nous notons $(2,1)$

— un jeton portant une face numéro 2 en bleu et une face numéro 2 en rouge, que nous notons $(2,2)$.

De même, lorsque $n = 3$, en notant toujours en premier le numéro bleu et en second le numéro rouge, l'urne contient les six jetons $(1,1)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(3,1)$, $(3,2)$, $(3,3)$.

Partie I : Tirage d'un jeton dans l'urne dans le cas $n = 4$.

Nous tirons un jeton au hasard dans l'urne. Nous désignons par B la variable aléatoire réelle égale à son numéro bleu et par R la variable aléatoire égale à son numéro rouge. Posons $G = B - R$.
Par exemple, si nous tirons le jeton $(3,2)$, c'est-à-dire avec le numéro 3 en bleu et le numéro 2 en rouge, nous avons $B = 3$, $R = 2$ et $G = 1$.

1. Justifier brièvement pourquoi nous avons les dix jetons suivants dans l'urne (en notant toujours en premier le numéro bleu et en second le numéro rouge) :

   $$(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4).$$

2. (a) Décrire l'ensemble des valeurs prises par les variables B et R.

   (b) Justifier que $P([B = 1] \cap [R = 1]) = \dfrac{1}{10}$. Que vaut $P([B = 1] \cap [R = 2])$?

(c) Recopier et compléter le tableau suivant qui donne la loi conjointe du couple (B,R) :

$j \in R(\Omega)$ \ $i \in B(\Omega)$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{10}$			
2				
3				
4				

3. (a) Déduire du tableau de la question précédente donnant la loi du couple (B,R), la loi de la variable aléatoire B.
   (b) Vérifier que l'espérance de B vaut $E(B) = 3$ et calculer la variance $V(B)$ de B.
4. (a) Déduire aussi de la loi du couple (B,R), la loi de R.
   (b) Calculer l'espérance de $E(R)$ et la variance $V(R)$ de la variable aléatoire R.
5. (a) À l'aide de la loi du couple (B,R) trouvée à la question 2c), calculer $E(BR)$.
   (b) Rappeler la formule qui donne la covariance $\text{Cov}(B,R)$ du couple (B,R) puis la calculer.
   (c) Est-ce que les variables aléatoires B et R sont indépendantes ?
6. Calculer $E(G)$ de la variable aléatoire G.

Partie II : Temps d'attente du premier et du second tirage du jeton numéroté 1 en bleu.

Dans cette partie, nous effectuons maintenant des tirages avec remise dans l'urne et nous supposons encore que $n = 4$ (nous avons donc encore les dix jetons données à la question 11) ? Considérons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement S_k : « nous obtenons le jeton numéroté 1 en bleu lors du k-ième tirage ».

7. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, Conservons les notations de la partie précédente :B_k et R_k désignent respectivement les numéros bleus et rouges du jeton tiré au k-ième tirage. Expliquer brièvement pourquoi nous avons les égalités d'événements suivantes : $S_k = [B_k = 1] = [B_k = 1] \cap [R_k = 1]$.
   En déduire que pour tout entier naturel k, nous avons $P(S_k) = \frac{1}{10}$
8. Notons T_1 la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois le jeton numéroté 1 en bleu.
   Donner, en justifiant, la loi suivie par T_1, puis donner son espérance et sa variance.
9. Notons T_2 la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la seconde fois le jeton numéroté 1 en bleu.
   Notons également pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, X_m la variable aléatoire égale au nombre de fois où nous avons obtenu l'événement S, c'est-à-dire où nous avons tiré le jeton numéroté 1 en bleu, lors des m tirages.
   (a) Décrire l'ensemble des valeurs prises par T_2.
   (b) Montrer que X_m suit une loi binomiale dont vous préciserez les paramètres.
   (c) Justifier que, pour tout $k \geqslant 2$, nous avons l'égalité des événements suivants :

$$[T_2 = k] = [X_{k-1} = 1] \cap S_k.$$

   (d) En déduire la loi de T_2.

Exercice 4 :

Considérons les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = 1, \quad w_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= 5u_n &+ &2w_n \\ w_{n+1} &= 3u_n &+ &6w_n. \end{cases}$$

Partie I : Variations des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété :

$$\mathscr{P}_n \ : \ u_n \text{ et } w_n \text{ sont des entiers strictement positifs.}$$

2. En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. sont strictement croissantes.

Partie II : Terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide de deux suites auxiliaires.

Considérons, dans cette partie, les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout entier naturel n par :

$$x_n = u_n + w_n \quad \text{et} \quad y_n = 3u_n - 2w_n.$$

3. Calculer les valeurs de x_0 et y_0.
4. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 8 puis donner le terme général de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Montrer que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3 puis donner le terme général de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. Pour tout n entier naturel fixé, résoudre le système d'inconnues u_n et w_n et de paramètre x_n et y_n :

$$\begin{cases} u_n &+ &w_n &= x_n \\ 3u_n &- &2w_n &= y_n \end{cases}$$

7. Nous pouvons alors en déduire les termes généraux de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$: montrer que pour tout entier naturel n,

$$u_n = -\frac{1}{5} \times 3^n + \frac{6}{5} \times 8^n \quad \text{et} \quad w_n = \frac{1}{5} \times 3^n + \frac{9}{5} \times 8^n$$

Partie III : Terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide d'une relation de récurrence d'ordre 2.

8. Calculer u_1 et w_1.
9. En notant que, pour tout entier naturel n, nous avons la relation :

$$(\star) : \quad w_n = \frac{1}{2}(w_{n+1} - 5u_n)$$

montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation

$$u_{n+2} = 11u_{n+1} - 24u_n$$

10. Déterminer les racines x_1 et x_2 du polynôme $X^2 - 11X + 24$.
11. Nous admettons qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$u_n = a(x_1)^n + b(x_2)^n,$$

où x_1 et x_2 sont les réels trouvés à la question 9.
En utilisant les valeurs de u_0 et u_1, déterminer les valeurs des réels a et b.

12. En déduire que, pour tout entier naturel n, nous avons $u_n = -\frac{1}{5} \times 3^n + \frac{6}{5} \times 8^n$ puis montrer à l'aide de la relation $(\star)$ de la question 8, que pour tout entier naturel n, nous avons $w_n = \frac{1}{5} \times 3^n + \frac{9}{5} \times 8^n$.

Partie IV : Terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide des puissances d'une matrice.

Considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ w_n \end{pmatrix}$

13. (a) Vérifier que $X_{n+1} = MX_n$.
    (b) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $X_n = M^n X_0$.
14. Calculer M^2 puis $M^2 - 11M + 24I_2$ où I_2 est la matrice identité de taille 2.
15. Calculer $M\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
16. Considérons les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.
    (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
    (b) Montrer que $MP = PD$.
    (c) Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, nous avons $M^n = PD^nP^{-1}$.
17. (a) Pour tout entier naturel n, déterminer les quatre coefficients de D^n puis en déduire ceux de M^n.
    (b) En utilisant la question 12b, retrouver, encore une fois les expressions des termes généraux des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Corrigé du DS2 : ECT2

Corrigé de l'exercice 1 : (BSB 2022)

1. Dans chaque urne, chaque jeton a la même probabilité $\frac{1}{2}$ d'être tiré. Puisqu'il y a deux urnes, quatre tirages sont possibles en tout :
   - Le jeton 0 est tiré dans l'urne U et le jeton 0 est tiré dans l'urne V : rien ne change, l'urne U contient toujours un jeton 0 et un jeton 1 et l'événement B_1 est vérifié.
   - Le jeton 0 est tiré dans l'urne U et le jeton 1 est tiré dans l'urne V : après échange, l'urne U contient deux jetons 1 et aucun jeton 0 et l'événement C_1 est vérifié.
   - Le jeton 1 est tiré dans l'urne U et le jeton 0 est tiré dans l'urne V : après échange, l'urne U contient deux jetons 0 et aucun jeton 1 et l'événement A_1 est vérifié.
   - Le jeton 1 est tiré dans l'urne U et le jeton 1 est tiré dans l'urne V : rien ne change, l'urne U contient toujours un jeton 0 et un jeton 1 et l'événement B_1 est vérifié.

   Ces quatre tirages étant équiprobables, j'obtiens ainsi que
   $$a_1 = \boxed{P(A_1) = \frac{1}{4}}, \quad b_1 = \boxed{P(B_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad c_1 = \boxed{P(C_1) = \frac{1}{4}}.$$

2. Soit un entier naturel $n \in \mathbb{N}$. La probabilité conditionnelle $P_{A_n}(B_{n+1})$ représente la probabilité de revenir à la configuration initiale lorsque l'urne U contient deux jetons 0. Mais alors l'urne V contient deux jetons 1 et le tirage sera nécessairement « Un jeton 0 est tiré dans l'urne U et un jeton 1 est tiré dans l'urne V », ce qui ramène bien les urnes à leur état initial avec un jeton 0 et un jeton 1 dans chacune d'entre elles. Donc je conclus bien que $\boxed{P_{A_n}(B_{n+1}) = 1}$, et pour la même raison, $\boxed{P_{C_n}(B_{n+1}) = 1}$. Pour $P_{B_n}(B_{n+1})$, le fait que l'événement B_n soit réalisé indique que les deux urnes sont dans leurs configurations initiales. Ainsi $\boxed{P_{B_n}(B_{n+1}) = P(B_1) = \frac{1}{2}}$. Finalement, d'après la formule des probabilités totales, puisque les événements A_n, B_n et C_n forment un système complet d'événements, alors
   $$\begin{aligned} b_{n+1} &= P(B_{n+1}) = P(A_n \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap B_{n+1}) + P(C_n \cap B_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(B_{n+1}) \\ &= a_n \times 1 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times 1 = \boxed{a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n}. \end{aligned}$$

3. D'après les explications données précédemment, puisqu'une configuration avec les deux même jetons dans chaque urne ramène toujours à la configuration initiale, alors :
   $$\boxed{P_{A_n}(A_{n+1}) = 0}, \boxed{P_{A_n}(C_{n+1}) = 0}, \boxed{P_{C_n}(A_{n+1}) = 0} \text{ et } \boxed{P_{C_n}(C_{n+1}) = 0}.$$
   De même, puisque la réalisation de l'événement B_n indique que les deux urnes sont dans leurs configurations initiales, $\boxed{P_{B_n}(A_{n+1}) = P(A_1) = \frac{1}{4}}$ et $\boxed{P_{B_n}(C_{n+1}) = P(C_1) = \frac{1}{4}}$. Finalement, d'après la formule des probabilités totales, puisque les événements A_n, B_n et C_n forment un système complet d'événements, alors
   $$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{4} + c_n \times 0 = \boxed{\frac{1}{4} b_n}. \end{aligned}$$
   et
   $$\begin{aligned} c_{n+1} &= P(C_{n+1}) P(A_n \cap C_{n+1}) + P(B_n \cap C_{n+1}) + P(C_n \cap C_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(C_{n+1}) \\ &= a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{4} + c_n \times 0 = \boxed{\frac{1}{4} b_n}. \end{aligned}$$

1. Pour tout entier naturel n, les événements A_n, B_n et C_n forment un système complet d'événements donc

$$P(A_n)+P(Bn)+P(Cn)=1, \text{ c'est-à-dire } \boxed{a_n+b_n+c_n=1}.$$

2. En réécrivant la formule obtenue à la question 4.b) de sorte à faire apparaître $a_n+b_n+c_n$, j'obtiens bien que

$$b_{n+1}=a_n+\frac{1}{2}b_n+c_n=a_n+b_n+c_n-\frac{1}{2}b_n=\boxed{1-\frac{1}{2}b_n}.$$

Corrigé de l'exercice 2 : ESCP26

1. Nous avons

$$T^2=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1+1&1\\0&1&1+1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}=I_3+N$$

Donc $\boxed{T^2=I_3+N}$.

2. Nous avons

$$N^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O_3$$

Donc $\boxed{N^2=O_3}$.

3. Nous avons pour $n\geqslant 2$, d'après le binôme de Newton et puisque N et I_3 commutent :

$$T^{2n}=(T^2)^n=(I_3+N)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}N^kI_3^k$$

Or $N^k=O_3$ si $k\geqslant 2$ donc :

$$T^{2n}=\binom{n}{0}N^0I_3^n+\binom{n}{1}N^1I_3^{n-1}+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}O_3^kI_3^k$$

Or $\binom{n}{0}=1$, $I_3^n=I_3$, $N^0=I_3$ et $\binom{n}{1}=n$. Donc :

$$T^{2n}=I_3+nN$$

Notons que la formule reste valable si $n=0$ car alors $T^{2n}=I_3$ et $n=1$. Donc pour tout entier positif : $\boxed{T^{2n}=I_3+nN}$.

4. Nous avons :

$$T^{2n+1}=T^{2n}T=(I_3+nN)T=\begin{pmatrix}1&0&n\\0&1&2n\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-1&1&n\\0&1&1+2n\\0&0&1\end{pmatrix}}.$$

Corrigé de l'exercice 3 : (BSB26)

Partie I : Tirage d'un jeton dans l'urne dans le cas $n = 4$.

1. Il y a bien $1+2+3+4 = 10$ jetons : pour chaque numéro bleu $k \in \{1,2,3,4\}$, il existe exactement k jetons possibles, portant les numéros rouges $1, 2, \cdots, k$.
2. (a) Les valeurs prises par B sont $\boxed{B(\Omega) = \{1,2,3,4\}}$.
   Les valeurs prises par R sont aussi $\boxed{R(\Omega) = \{1,2,3,4\}}$.
   (b) L'événement $[B = 1] \cap [R = 1]$ correspond au seul jeton $(1,1)$; comme il y a 10 jetons équiprobables, $\boxed{P([B = 1] \cap [R = 1]) = \frac{1}{10}}$.
   L'événement $[B = 1] \cap [R = 2]$ est impossible, car aucun jeton n'a de numéro en bleu 1 et en rouge 2. Donc $\boxed{P([B = 1] \cap [R = 2]) = 0}$.
   (c) La loi conjointe du couple (B, R) est donnée par

$$P(B = i, R = j) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{si} \quad 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Le tableau correspondant est :

$j \in R(\Omega)$ \ $i \in B(\Omega)$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
2	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
3	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
4	0	0	0	$\frac{1}{10}$

3. (a) En sommant chacune des valeurs d'une colonne donnée, nous obtenons :

$B = i$	1	2	3	4
$P(B = i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

   (b) Alors

$$E(B) = \sum_{i=1}^{4} iP(B = i) = 1 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{2}{10} + 3 \times \frac{3}{10} + 4 \times \frac{4}{10} = \frac{1+4+9+16}{10} = \frac{30}{10} = \boxed{3}$$

   Puis

$$E(B^2) = \sum_{i=1}^{4} i^2 P(B = i) = 1^2 \times \frac{1}{10} + 2^2 \times \frac{2}{10} + 3^2 \times \frac{3}{10} + 4^2 \times \frac{4}{10} = \frac{1+8+27+64}{10} = \frac{100}{10} = 10.$$

   Et par la formule de König-Huygens

$$V(B) = E(B^2) - E(B)^2 = 10 - 3^2 = 10 - 9 = \boxed{1}.$$

4. (a) En sommant chacune des valeurs d'une ligne donnée, nous obtenons :

$R=j$	1	2	3	4
$P(R=j)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

(b) Alors

$$E(B)=\sum_{j=1}^{4} iP(B=j)=1\times\frac{4}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{2}{10}+4\times\frac{1}{10}=\frac{4+6+6+4}{10}=\frac{20}{10}=\boxed{2}$$

Puis

$$E(R^2)=\sum_{j=1}^{4} j^2P(R=j)=1^2\times\frac{4}{10}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{2}{10}+4^2\times\frac{1}{10}=\frac{4+12+18+16}{10}=\frac{50}{10}=5.$$

Et par la formule de König-Huygens

$$V(R)=E(R^2)-E(R)^2=5-2^2=5-4=\boxed{1}.$$

5. (a) D'après la loi conjointe,

$$E(BR)=\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant 4} ij\times\frac{1}{10}=\frac{1+2+4+3+6+9+4+8+12+16}{10}=\frac{65}{10}=\boxed{\frac{13}{2}}.$$

(b) Rappelons la formule de la covariance ainsi que la formule de König-Huygens qui nous permettra de faire les calculs ici :

$$\boxed{\mathrm{Cov}(B,R)=E\left((B-E(B))(R-E(R))\right)=E(BR)-E(B)E(R)}.$$

Ainsi $\mathrm{Cov}(B,R)=\frac{13}{2}-3\times 2=\frac{13-12}{2}=\boxed{\frac{1}{2}}$.

(c) Si B et R étaient indépendantes, leur covariance serait nulle. Ce n'est pas le cas donc B et R ne sont pas indépendantes.

6. Par linéarité de l'espérance,

$$E(G)=E(B-R)=E(B)-E(R)=3-2=1.$$

Donc $\boxed{E(G)=1}$.

Partie II : Temps d'attente du premier et du second tirage du jeton numéroté 1 en bleu.

7. Le seul jeton dont le numéro en bleu vaut 1 est le jeton $(1,1)$. Donc

$$S_k=[B_k=1]=[B_k=1]\cap[R_k=1].$$

À chaque tirage, la probabilité de tirer ce jeton est $\boxed{P(S_k)=\frac{1}{10}}$.

8. — Considérons l'expérience de Bernoulli « tirer un jeton », dont le succès, S, est « le jeton est celui dont le numéro bleu est 1 », et $P(S)=\frac{1}{10}$
— Répétons de manière identique et indépendante cette expérience jusqu'à obtenir un succès.
— T_1 donne le nombre de tirage nécessaires pour avoir le succès.

— Donc T_1 suit une loi géométrique de paramètre et $\boxed{p = \frac{1}{10}}$.

Nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \boxed{P(T_1 = n) = \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \times \frac{1}{10}} \quad \boxed{E(T_1) = \frac{1}{p} = 10} \quad \boxed{V(T_1) = \frac{1-p}{p^2} = 100 \times \frac{9}{10} = 90}.$$

9. (a) Il faut au minimum 2 tirages pour obtenir deux fois ce jeton. Donc

$$\boxed{T_2(\Omega) = \{2,3,4,\cdots\}}.$$

(b) — Considérons l'expérience de Bernoulli « tirer tirer un jeton », dont le succès, S, est « le jeton est celui dont le numéro bleu est 1 », et $P(S) = \frac{1}{10}$

— Répétons de manière identique et indépendante cette expérience m fois.

— X_m compte les succès.

— Donc X_m suit une loi binomiale de paramètres $\boxed{m}$ et $\boxed{p = \frac{1}{10}}$.

(c) Pour $k \geqslant 2$, obtenir la seconde apparition du jeton du numéro 1 en bleu au k-ième tirage signifie :

— il y a eu exactement un succès pendant les $k-1$ premiers tirages ;

— le k-ième tirage est un succès.

Donc

$$\boxed{[T2 = k] = [X_{k-1} = 1] \cap S_k}.$$

(d) Par indépendance de S_k avec les $k-1$ premiers tirages, $P(T_2 = k) = P(X_{k-1} = 1)P(S_k)$. Or

$$P(X_{k-1} = 1) = \binom{k-1}{1}\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)^{k-2}.$$

Donc

$$P(T_2 = k) = (k-1)\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)^{k-2} \times \frac{1}{10}.$$

Finalement, pour $k \geqslant 2$, $\boxed{P(T_2 = k) = \frac{k-1}{100} \times \left(\frac{9}{10}\right)^{k-2}}$.

Corrigé de l'exercice 4 : (BSB26)

Partie I : Variations des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Je raisonne par récurrence comme indiqué dans la question pour montrer pour tout entier la propriété :

$$\mathscr{P}_n \ : \ u_n \text{ et } w_n \text{ sont des entiers strictement positifs.}$$

Initialisation : Nous montrons $\mathscr{P}_0$.

$u_0 = 1 \in \mathbb{N}^*$ et $w_0 = 2 \in \mathbb{N}^*$.

$\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ et nous supposons $\mathscr{P}_n$ vraie c'est à dire que u_n et w_n sont des entiers strictement positifs et montrons $\mathscr{P}_{n+1}$ c'est à dire que u_{n+1} et w_{n+1} sont des entiers strictement positifs

Comme, par hypothèse de récurrence, $u_n \in \mathbb{N}^*$, $5u_n$ est aussi un entier strictement positif. De même, $w_n \in \mathbb{N}^*$, $2w_n$ est aussi un entier strictement positif. La somme de deux entiers

strictement positifs est un entier strictement positif, donc u_{n+1} est un entier strictement positif.

Comme, par hypothèse de récurrence, $u_n \in \mathbb{N}^*$, $3u_n$ est aussi un entier strictement positif. De même, $w_n \in \mathbb{N}^*$, $6w_n$ est aussi un entier strictement positif. La somme de deux entiers strictement positifs est un entier strictement positif, donc w_{n+1} est un entier strictement positif.

Ainsi $\mathscr{P}_n$ est héréditaire.

Conclusion : D'après le principe de récurrence $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc

$$\boxed{u_n \text{ et } w_n \text{ sont des entiers strictement positifs}}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} - u_n = 4u_n + 2w_n > 0,$$
car u_n et w_n sont strictement positifs. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. De même,
$$w_{n+1} - w_n = 3u_n + 5w_n > 0,$$
donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Partie II : Terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide de deux suites auxiliaires.

3. $x_0 = u_0 + w_0 = 1 + 2 = \boxed{3}$, $y_0 = 3u_0 - 2w_0 = 3 - 4 = \boxed{-1}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$x_{n+1} = u_{n+1} + w_{n+1} = (5u_n + 2w_n) + (3u_n + 6w_n) = 8(u_n + w_n) = 8x_n.$$
Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 8 et de premier terme $x_0 = 3$. Ainsi
$$\boxed{x_n = x_0 q^n = 3 \times 8^n}.$$
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$y_{n+1} = 3u_{n+1} - 2w_{n+1} = 3(5u_n + 2w_n) - 2(3u_n + 6w_n) = 9u_n - 6w_n = 3(3u_n - 2w_n) = 3y_n.$$
Donc $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3 et de premier terme $y_0 = -1$. Ainsi
$$\boxed{y_n = y_0 q^n = -3^n}.$$
6. Pour un entier n fixé, le système $\begin{cases} u_n + w_n = x_n \\ 3u_n - 2w_n = y_n \end{cases}$ se résout de la façon suivante.

De la première équation, $w_n = x_n - u_n$. En remplaçant dans la seconde :
$$3u_n - 2(x_n - u_n) = y_n \iff 5u_n = y_n + 2x_n.$$
Donc $u_n = \dfrac{y_n + 2x_n}{5}$. Puis
$$w_n = x_n - u_n = x_n - \frac{y_n + 2x_n}{5} = \frac{3x_n - y_n}{5}.$$
Ainsi $\boxed{u_n = \dfrac{y_n + 2x_n}{5}}$ et $\boxed{w_n = \dfrac{3x_n - y_n}{5}}$

7. En utilisant les expressions de x_n et y_n,

$$\boxed{u_n = \frac{-3^n + 2\times 3\times 8^n}{5} = -\frac{1}{5}\times 3^n + \frac{6}{5}\times 8^n}, \quad \text{et} \quad \boxed{w_n = \frac{3\times 3\times 8^n - (-3^n)}{5} = \frac{1}{5}\times 3^n + \frac{9}{5}\times 8^n}$$

Partie III : Terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide d'une relation de récurrence d'ordre 2.

8. Calculons $u_1 = 5u_0 + 2w_0 = 5+4 = \boxed{9}$, $w_1 = 3u_0 + 6w_0 = 3+12 = \boxed{15}$.
9. Nous avons par la relation $(\star)$ appliquée à w_{n+1} :

$$w_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n+2} - 5u_{n+1})$$

Et d'après la relation de récurrence sur w_n donnée dans l'énoncé et la relation $(\star)$,

$$w_{n+1} = 3u_n + 6w_n = 3u_n + 6\times\frac{1}{2}(u_{n+1} - 5u_n) = 3u_n + 3u_{n+1} - 15u_n = 3u_{n+1} - 12u_n.$$

Identifions les deux expressions de w_{n+1} que nous venons d'obtenir :

$$\frac{1}{2}(u_{n+2} - 5u_{n+1}) = 3u_{n+1} - 12u_n$$

En multipliant par 2,

$$u_{n+2} - 5u_{n+1} = 6u_{n+1} - 24u_n,$$

soit $\boxed{u_{n+2} = 11u_{n+1} - 24un}$.

10. $X^2 - 11X + 24$ est un polynôme de degré 2. Calculons son discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 11^2 - 4\times 1\times 24 = 121 - 96 = 25 > 0$$

Il y a donc deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{11-5}{2} = \boxed{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{11+5}{2} = \boxed{8}$$

11. Avec la propriété admise : Avec $n=0$: $u_0 = 1 = a+b$.
Avec $n=1$: $u_1 = 9 = 3a+8b$.
Résolvons le système :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 3a + 8b = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 1 \\ \quad + 5b = 6 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$$

D'où $\boxed{b = \frac{6}{5}}$ et $\boxed{a = 1-b = 1-\frac{6}{5} = -\frac{1}{5}}$.

12. Nous retrouvons $\boxed{u_n = -\frac{1}{5}\times 3^n + \frac{6}{5}\times 8^n}$, d'après la question précédente.

Puis, à partir de $(\star)$, $w_n = \frac{1}{2}(u_{n+1} - 5u_n)$.
Or

$$u_{n+1} = -\frac{1}{5}\times 3^{n+1} + \frac{6}{5}\times 8^{n+1} = -\frac{3}{5}\times 3^n + \frac{6\times 8}{5}\times 8^n = -\frac{3}{5}\times 3^n + \frac{48}{5}\times 8^n.$$

D'où

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 5u_n &= \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5}\times 3^n + \frac{48}{5}\times 8^n - 5\left(-\frac{1}{5}\times 3^n + \frac{6}{5}\times 8^n\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5}\times 3^n + \frac{48}{5}\times 8^n + \frac{5}{5}\times 3^n - \frac{30}{5}\times 8^n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\times 3^n + \frac{18}{5}\times 8^n\right) \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{w_n = \frac{1}{5} \times 3^n + \frac{9}{5} \times 8^n}$.

Partie IV : Terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide des puissances d'une matrice.

13. (a) Nous avons
$$MX_n = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5u_n + 2w_n \\ 3u_n + 6w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$
Donc $\boxed{X_{n+1} = MX_n}$.

(b) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous posons $\mathscr{P}_n$: « Démontrer que : $X_n = M^n X_0$ ».
Initialisation : Nous montrons $\mathscr{P}_0$.
$$M^0 X_0 = I_2 X_0 = X_0$$
$\mathscr{P}_0$ est vraie.
Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ et nous supposons $\mathscr{P}_n$ vraie. Nous avons donc $X_n = M^n X_0$ et nous voulons montrer : $X_{n+1} = M^{n+1} X_0$
D'après la question précédente : $X_{n+1} = MX_n$ et par hypothèse de récurrence : $X_n = M^n X_0$ d'où :
$$X_{n+1} = MX_n = M \times M^n X_0 = M^{n+1} X_0$$
Ainsi $\mathscr{P}_n$ est héréditaire.
Conclusion : D'après le principe de récurrence $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit
$$\boxed{X_n = M^n X_0}.$$

14. Nous avons :
$$M^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25+6 & 10+12 \\ 15+18 & 6+36 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 31 & 22 \\ 33 & 42 \end{pmatrix}}$$
Et
$$M^2 - 11M + 24I_2 = \begin{pmatrix} 31 & 22 \\ 33 & 42 \end{pmatrix} - 11\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + 24\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31-55+24 & 22-22 \\ 33-33 & 42-66+24 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

15. Nous avons :
$$M\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \boxed{3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}.$$
De même,
$$M\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+6 \\ 6+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \end{pmatrix} = \boxed{8\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}.$$

16. (a) $\det(P) = 1 \times 3 - 2(-1) = 5 \neq 0$. Donc P est inversible, et
$$P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Nous avons :
$$MP = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2 & 10+6 \\ 3-6 & 6+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 16 \\ -3 & 24 \end{pmatrix}$$
Et
$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 16 \\ -3 & 24 \end{pmatrix}$$
Donc $\boxed{MP = PD}$.

(c) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous posons $\mathscr{P}_n$: « $M^n = PD^nP^{-1}$ ».
Initialisation : Nous montrons $\mathscr{P}_0$.
$M^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = I$.
$\mathscr{P}_0$ est vraie.
Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ et nous supposons $\mathscr{P}_n$ vraie. Nous avons donc $M^n = PD^nP^{-1}$ et nous voulons montrer : $M^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$
D'après la question précédente : $PD = MP$, soit $M = PDP^{-1}$.
Nous avons, par hypothèse de récurrence :

$$M^{n+1} = M \times M^n = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PDID^nP^{-1} = PD \times D^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

Ainsi $\mathscr{P}_n$ est héréditaire.
Conclusion : D'après le principe de récurrence $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\boxed{M^n = PD^nP^{-1}}$.

17. (a) Puisque D est diagonale, pour tout entier naturel n :

$$\boxed{D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 8^n \end{pmatrix}}$$

(b) Comme $X_n = M^nX_0$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, nous obtenons

$$X_n = PD^nP^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Or :

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3-4 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Puis

$$D^nP^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 8^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3^n \\ 3 \times 8^n \end{pmatrix}$$

Et enfin :

$$X_n = PD^nP^{-1}X_0 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3^n \\ 3 \times 8^n \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3^n + 6 \times 8^n \\ 3^n + 9 \times 8^n \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\boxed{u_n = \frac{1}{5}\left(-3^n + 6 \times 8^n\right) = -\frac{1}{5} \times 3^n + \frac{6}{5} \times 8^n} \quad \text{et} \quad \boxed{w_n = \frac{1}{5}\left(3^n + 9 \times 8^n\right) = \frac{1}{5} \times 3^n + \frac{9}{5} \times 8^n}.$$