

Calcul numérique et algébrique

1 Nombres, intervalles

1.1 Les ensembles de nombre

- L'ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N}$.

C'est l'ensemble des entiers positifs et 0.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$26 \in \mathbb{N} \text{ mais } -3 \notin \mathbb{N}.$$

On dit que ces entiers sont naturels car ce sont eux que l'on utilise naturellement dans la vie de tous les jours.

- L'ensemble des entiers relatifs : $\mathbb{Z}$.

Un entier relatif est un nombre entier pouvant être positif ou négatif ie (c'est à dire) un entier naturel précédé ou non d'un signe "-"

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Tous les entiers naturels sont des entiers relatifs : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}$ vient de l'allemand "zahl" qui signifie *nombre*.

- L'ensemble des nombres décimaux : $\mathbb{D}$.

Un nombre décimal est le quotient d'un entier relatif par une puissance de 10. Il peut s'écrire sous forme décimale comprenant une partie entière, une virgule et après la virgule une partie décimale finie.

$$d = \frac{a}{10^n} \text{ par exemple } 201,57 = \frac{20157}{10^2} \in \mathbb{D}.$$

- L'ensemble des nombres rationnels : $\mathbb{Q}$.

Un rationnel est le quotient d'un entier relatif par un entier naturel non nul.

$$p = \frac{a}{b} \text{ avec } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{N} \setminus \{0\} = \mathbb{N}^*.$$

$$\frac{2}{3} \in \mathbb{Q} \quad -\frac{51}{7} \in \mathbb{Q}.$$

Un rationnel non décimal a une écriture décimale périodique infinie

$$\frac{52}{11} = 4,727272\dots \quad \frac{52}{11} \in \mathbb{Q} \text{ mais } \frac{52}{11} \notin \mathbb{D}.$$

- L'ensemble des nombres réels : $\mathbb{R}$.

Ce sont tous les nombres pouvant mesurer une longueur et leurs opposés. C'est l'ensemble de tous les nombres utilisés cette année.

$$\text{On a } \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

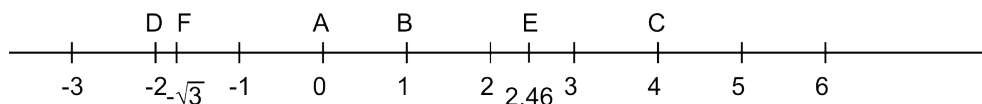
Les réels n'appartenant pas à $\mathbb{Q}$ sont appelés irrationnels. Par exemple π et $\sqrt{2}$ sont irrationnels.

1.2 Les intervalles de $\mathbb{R}$

1.2.1 Représentation graphique de $\mathbb{R}$

L'ensemble des nombres réels est habituellement représenté sous la forme d'une droite graduée : à chaque point de la droite est associé un unique réel appelé abscisse de ce point.

Exemple :

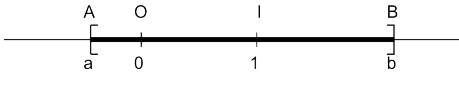
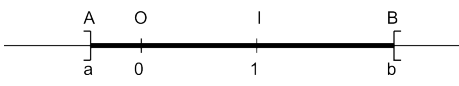
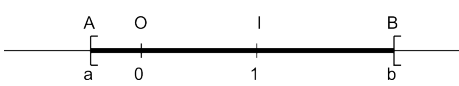
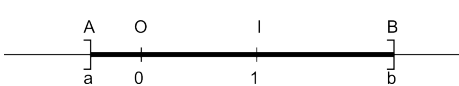
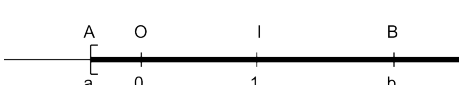
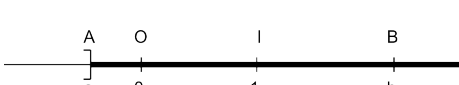
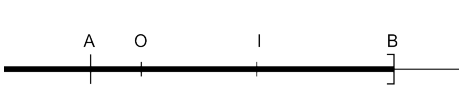
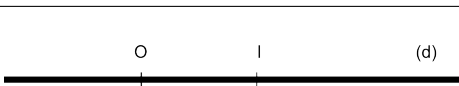


Les abscisses des points A , B , C , D , E et F sont respectivement $x_A = 0$, $x_B = 1$, $x_C = 4$, $x_D = -2$, $x_E = 2,46$ et $x_F = -\sqrt{3}$.

1.2.2 Les différents types d'intervalles

Un intervalle de $\mathbb{R}$ est représenté par un segment, une demi-droite ou par la droite toute entière. Chaque intervalle est associé à une inégalité ou un encadrement concernant les abscisses des points de la droite appartenant à ce segment ou cette demi-droite.

Soit A et B deux points de la droite d'abscisses respectives a et b ($a < b$) et soit M un point de la droite d'abscisse x , on obtient les différents intervalles suivants :

M	Nombres x	Représentation graphique	Notation intervalle
$M \in [AB]$	$a \leq x \leq b$	 Intervalle fermé borné	$[a; b]$
$M \in]AB[$	$a < x < b$	 Intervalle ouvert borné	$]a; b[$
$M \in [AB[$	$a \leq x < b$	 Intervalle semi-ouvert à droite, borné	$[a; b[$
$M \in]AB]$	$a < x \leq b$	 Intervalle semi-ouvert à gauche, borné	$]a; b]$
$M \in [AB)$	$x \geq a$	 Intervalle fermé infini	$[a; +\infty[$
$M \in]AB)$	$x > a$	 Intervalle ouvert infini	$]a; +\infty[$
$M \in (AB]$	$x \leq b$	 Intervalle fermé infini	$] - \infty; b]$
$M \in (AB[$	$x < b$	 Intervalle ouvert infini	$] - \infty; b[$
$M \in (d)$	$x \in \mathbb{R}$	 (d)	$] - \infty; +\infty[$

Remarques :

- On dit qu'un intervalle est fermé si ses extrémités finies lui appartiennent. Par exemple $[6; 12]$ et $[-2; +\infty[$ sont fermés.
- On dit qu'un intervalle est ouvert si ses extrémités finies ne lui appartiennent pas. Par exemple $] - 4; 7[$ et $] - \infty; 3[$ sont ouverts.
- L'ensemble $\mathbb{R}$ est aussi un intervalle il peut se noter $] - \infty; +\infty[$. $\mathbb{R}$ est un intervalle à la fois ouvert et fermé.
- L'ensemble ne contenant aucun réel est aussi un intervalle, c'est l'intervalle vide, il se note $\emptyset$.

1.2.3 Intersection et réunion d'intervalles

- L'intersection de deux intervalles I et J est l'ensemble des nombres qui sont dans I et dans J (les deux à la fois) elle se note $I \cap J$.
- La réunion de deux intervalles I et J est l'ensemble des nombres qui sont dans I ou dans J (au moins l'un des deux) elle se note $I \cup J$.

Exercice 1 :

Soit les trois intervalles

$$I =]0, 5[, \quad J =]-\infty; 3[\quad \text{et} \quad K = [2; +\infty[.$$

Déterminer

$$I \cap J, \quad I \cap K, \quad J \cap K, \quad I \cup J, \quad I \cup K \quad \text{et} \quad J \cup K.$$

2 Calcul algébrique

2.1 Les fractions

Proposition et définition

Chaque réel b non nul possède un inverse, noté $\frac{1}{b}$ ou b^{-1} , défini par :

$$b \times \frac{1}{b} = 1$$

Définition

Soient a et b deux entiers relatifs avec $b \neq 0$.

Le réel noté $\frac{a}{b}$, défini par $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ est le quotient de a par b .

$\frac{a}{b}$ est le nombre réel tel que $\frac{a}{b} \times b = a$.

a est le numérateur de la fraction et b est le dénominateur de la fraction.

Proposition, égalité de deux fractions

La valeur d'une fraction n'est pas modifiée si l'on multiplie ou divise son numérateur et son dénominateur par le même nombre.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} = \frac{\frac{a}{k}}{\frac{b}{k}} \quad \text{avec} \quad b \neq 0 \text{ et } k \neq 0.$$

Définition

L'inverse de la fraction $\frac{a}{b}$ est la fraction $\frac{b}{a}$.

Exemple :

$$\frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}.$$

Proposition

Somme de deux fractions ayant même dénominateur

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \text{avec } c \neq 0,$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c} \quad \text{avec } c \neq 0.$$

Exemples :

$$\frac{5}{3} + \frac{11}{3} = \frac{5+11}{3} = \frac{16}{3} \quad \text{et} \quad \frac{15}{6} - \frac{7}{6} = \frac{15-7}{6} = \frac{8}{6}.$$

Remarque :

Pour additionner ou soustraire deux fractions n'ayant pas le même dénominateur, on réduit d'abord ces deux fractions au même dénominateur puis on effectue l'addition ou la soustraction en appliquant la propriété précédente.

Exemples :

$$\frac{5}{2} + 3 = \frac{5}{2} + \frac{3}{1} = \frac{5}{2} + \frac{3 \times 2}{1 \times 2} = \frac{5}{2} + \frac{6}{2} = \frac{11}{2}.$$

$$\frac{3}{2} - \frac{4}{5} = \frac{3 \times 5}{2 \times 5} - \frac{4 \times 2}{5 \times 2} = \frac{15}{10} - \frac{8}{10} = \frac{7}{10}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{6} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} - \frac{5 \times 2}{6 \times 2} = \frac{9}{12} - \frac{10}{12} = -\frac{1}{12}.$$

Proposition

Multiplication de deux fractions.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \quad \text{avec } b \neq 0 \text{ et } d \neq 0.$$

Exemple :

$$\frac{2}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{2 \times 4}{5 \times 3} = \frac{8}{15}.$$

Proposition

Diviser deux fractions revient à multiplier la première par l'inverse de la seconde :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c} \quad \text{avec } b \neq 0, c \neq 0 \text{ et } d \neq 0.$$

Exemples :

$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{7}} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{\frac{5}{7}} = \frac{3}{2} \times \frac{7}{5} = \frac{21}{10} \quad ; \quad \frac{3}{\frac{4}{7}} = 3 \times \frac{1}{\frac{4}{7}} = 3 \times \frac{7}{4} = \frac{21}{4} \quad ; \quad \frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{7}} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{\frac{7}{7}} = \frac{3}{28}$$

Exercice 2 :

Ecrire sous la forme d'une fraction irréductible les nombres suivants :

$$A = \frac{5}{6} + \frac{3}{4} - 2 \quad ; \quad B = \frac{2}{5} - \frac{12}{15} \times \frac{3}{8} \quad ; \quad C = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{9}{8}} \quad ; \quad D = \frac{12}{\frac{18}{5}} \quad ; \quad E = \frac{\frac{8}{7} - 2}{1 - \frac{5}{14}}$$

2.2 Les puissances de 10

Définition

Soit n un entier positif,

$$10^n = 10 \times 10 \times \cdots \times 10 \quad n \text{ fois et } 10^0 = 1.$$

Exemples :

$$10^3 = 1000 = 10 \times 10 \times 10 \quad \text{et} \quad 10^4 = 10000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10.$$

Définition

Soit n un entier positif. On définit le nombre 10^{-n} de la façon suivante

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n}.$$

Exemples :

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001 \quad \text{et} \quad 10^{-5} = \frac{1}{10^5} = 0,00001.$$

Proposition

Soit m et n deux entiers relatifs,

$$10^m \times 10^n = 10^{m+n}, \quad (10^m)^n = 10^{m \times n} \quad \text{et} \quad \frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}.$$

Exemples :

$$10^5 \times 10^3 = 10^{5+3} = 10^8 \quad \text{et} \quad (10^5)^3 = 10^{5 \times 3} = 10^{15}.$$
$$(10^{-2})^3 = 10^{(-2) \times 3} = 10^{-6}, \quad \frac{10^8}{10^3} = 10^{8-3} = 10^5 \quad \text{et} \quad \frac{10^5}{10^{-2}} = 10^{5-(-2)} = 10^{5+2} = 10^7.$$

Exercice 3 :

Donner les valeurs, entières ou décimales des nombres suivants :

$$A = 10^2 \times 10^{-1} \quad ; \quad B = 10^3 + 10^2 \quad ; \quad C = 10^2 - 10^{-1} \quad ; \quad D = \frac{10^3}{10^{-2}}$$

$$E = \frac{10^3 + 10^5}{10^4} \quad ; \quad F = \frac{10^6 \times 10^{-1} - 10^4}{10^3} \quad ; \quad G = 10^5 \times (10^2)^{-3}$$

2.3 Puissances entières d'un réel

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un nombre réel a est un produit de n facteurs tous égaux à a .

$$a^2 = a \times a, \quad a^3 = a \times a \times a \quad \text{et} \quad a^n = a \times a \times \cdots \times a \quad n \text{ fois.}$$

n est appelé l'exposant.

Remarque :

On remarque vite sur un exemple la propriété suivante :

$$a^2 \times a^3 = (a \times a) \times (a \times a \times a) = a^{2+3} = a^5.$$

Plus généralement, $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

Si on veut que cette propriété soit conservée pour tout nombre entier n on doit se poser les questions suivantes :

$$a^0 = ? \quad a^{-n} = ? \quad \text{avec } n > 0.$$

D'après la propriété ci dessus on a

$$a^k \times a^0 = a^{k+0} = a^k \implies a^0 = 1$$

$$a^n \times a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1 \implies a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Définition

Pour $a \neq 0$,

$$a^0 = 1 \text{ et pour } n \in \mathbb{N}, a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Proposition

Pour n et m deux entiers relatifs et $a \neq 0$,

- $a^n a^m = a^{n+m}$,
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$,
- $(a^n)^m = a^{n \times m}$,
- $a^n \times b^n = (ab)^n$,
- $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$,
- $a^n = a^m \iff n = m$

Exercice 4 :

Ecrire les nombres suivants sous la forme d'une seule puissance

$$a = 5^{-3} \times (5^3)^2, \quad b = \frac{(7^5)^4}{7^{12}}, \quad c = \frac{(0,001)^3 \times 0,01}{10000}$$

$$d = (x^{-3})^2 \times x^8, \quad e = \frac{3^{2n}}{3^{n-1}} \quad \text{et} \quad f = 2 \times 4^{n+1}.$$

2.4 Racine carrée

Définition

La racine carrée d'un nombre positif a est le seul nombre positif b dont le carré est égal à a .
On a donc $b^2 = a$ et on note $b = \sqrt{a}$.

Exemples :

$$\sqrt{9} = 3 \text{ car } 3^2 = 9, \quad \sqrt{0} = 0, \quad \sqrt{1} = 1, \quad \sqrt{16} = 4 \text{ car } 4^2 = 16, \quad \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}.$$

Remarques :

- Les nombres négatifs n'ont pas de racine carrée.
- On donc pour tous réels x et y positifs :

$$x^2 = y \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$$

- Soit a un réel positif. L'autre réel dont le carré vaut a est $-\sqrt{a}$.
On a donc aussi $(-\sqrt{a})^2 = a$

Proposition

Si a est un nombre positif

$$\sqrt{a^2} = a, \quad (\sqrt{a})^2 = a, \quad \sqrt{(-a)^2} = a.$$

Exemples :

$$\sqrt{3^2} = 3, \quad \sqrt{(-5)^2} = 5, \quad \sqrt{10^6} = \sqrt{(10^3)^2} = 10^3.$$

Proposition

Soient a et b deux réels positifs

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Remarques :

Comment simplifier des expressions comportant des racines carrées ?

Si k et a sont des réels positifs ou nuls, on a :

$$\sqrt{k^2 a} = \sqrt{k^2} \sqrt{a} = k \sqrt{a}$$

Exemples :

$$\sqrt{3} \times \sqrt{10} = \sqrt{30}, \quad \sqrt{200} = \sqrt{100 \times 2} = \sqrt{100} \times \sqrt{2} = 10\sqrt{2}.$$

$$\sqrt{4a} = \sqrt{2^2 a} = 2\sqrt{a}$$

$$\sqrt{50} + 6\sqrt{2} = \sqrt{25 \times 2} + 6\sqrt{2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 11\sqrt{2}.$$

$$\frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{8}{4}} = \sqrt{2}$$

Pour tout réel strictement positif a on a :

$$\frac{a}{\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a})^2}{\sqrt{a}} = \sqrt{a} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{a}}{a} = \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

Exercice 5 :

Ecrire les racines suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers naturels, avec b le plus petit possible :

$$\sqrt{48} \quad ; \quad \sqrt{75} \quad ; \quad \sqrt{117} \quad ; \quad \sqrt{175} \quad ; \quad \sqrt{176}$$

Attention : $\sqrt{a+b}$ n'est pas égal à $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Exemple :

$$\sqrt{9} + \sqrt{25} = 3 + 5 = 8 = \sqrt{64} \quad \text{et} \quad \sqrt{9+25} = \sqrt{34}.$$

3 Développement, factorisation d'expression algébriques

3.1 Développement

Développer un produit, c'est le transformer en une somme ou une différence.

Proposition

Pour tous nombres a, b, c, d et k on a

$$k(a+b) = ka + kb$$

$$k(a-b) = ka - kb$$

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Exercice 6 :

Développer l'expression

$$A = 4(2x+1) + (3x-1)(4x+5)$$

Exercice 7 :

Développer

$$B = 4(\sqrt{2}-3) - \sqrt{5}(\sqrt{10}-5)$$

Exercice 8 :

Développer et réduire

$$C = (x-2)x + (3-5x) - (1+3x)(-2-x)$$

Exercice 9 :

Ecrire sous la forme la plus simple possible

$$D = (3 + \sqrt{2})(5 - 4\sqrt{2})$$

Exercice 10 :

Réduire au même dénominateur et écrire sous la forme d'un quotient

$$E = \frac{4x-1}{2x+1} - \frac{2x}{x-3}, \quad F = \frac{1}{x} + \frac{x+1}{x(x-2)}$$

3.2 Identités remarquables

Propriété

Pour tous nombres réels a et b ,

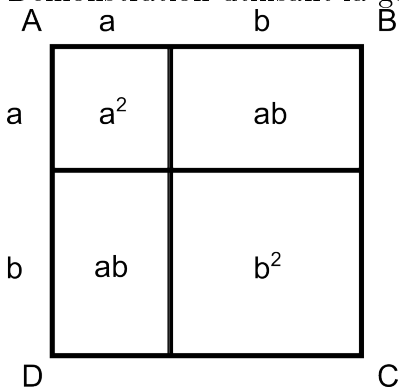
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Remarque :

Démonstration utilisant la géométrie.



$ABCD$ est un carré de côté $a+b$ son aire vaut donc $(a+b)^2$, d'où

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Exercice 11 :

Développer

$$A = (x + 5)^2 \quad ; \quad B = (5x + 3)^2$$

$$C = (x - 7)^2 \quad ; \quad D = (2x - 3)^2$$

$$E = (x - 3)(x + 3) \quad ; \quad F = (2x + 5)(2x - 5)$$

Exercice 12 :

Simplifier

$$G = (3\sqrt{2} + 5)^2, \quad H = \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{5} + 1}$$

Pour H on pourra multiplier numérateur et dénominateur par $\sqrt{5} - 1$.

Exercice 13 :

Le nombre d'or est $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Démontrer que

$$\Phi + 1 = \Phi^2$$

Exercice 14 :

Développer et réduire les expressions suivantes

$$I = (2x + 1)^2 + (3x - 2)(3x + 2)$$

$$J = -(-3x - 2)^2 + x(2 - x)(3 + x)$$

3.3 Factorisation

Factoriser une somme ou une différence, c'est la transformer en produit.

- Pour factoriser on peut :
 - reconnaître un facteur en commun.

$$ka + kb = k(a + b)$$

$$ka - kb = k(a - b)$$

- reconnaître un identité remarquable :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

- Ne pas oublier le facteur 1 dans une factorisation :

$$ab + a = a(b + 1)$$

- La somme de deux carrés ne se transforme pas en forme factorisée.
- si $a \neq 0$, $a + b = a \left(1 + \frac{b}{a}\right)$
- Puls généralement si $c \neq 0$, $a + b = c \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)$

Exercice 15 :

Factoriser les expressions suivantes :

$$A = (x + 2)^2 + x + 2 \quad ; \quad B = 4x^2 - (x - 2)^2 \quad ; \quad C = (3x - 1)^2 - 3x + 1$$

$$D = x^2 - 6x + 9 \quad ; \quad E = 9x^2 - 1 + (x - 3)(3x - 1)$$

$$F = (3x - 4)^2 + 5(4 - 3x) \quad ; \quad G = 2x^2 - 7$$

Exercice 16 :

Simplifier si possible les expressions suivantes :

$$H = \frac{2x^2 + x}{x}, \quad I = \frac{(2x - 3)(x + 1)}{2x^2 - 3x}, \quad J = \frac{x^2 + 4x}{(x - 1)^2 - 1}$$

Exercice 17 :

Ecrire plus simplement les réels suivants :

$$K = 3^{n+2} - 3^n, \quad L = 4 \times 2^{n+2} - 3 \times 2^{n+1} + 5 \times 2^n$$

Exercice 18 :

Réduire au même dénominateur et écrire sous forme d'un quotient

$$K = \frac{1}{x(x + 1)} - \frac{1}{x^2 - 1}.$$

4 Résolution d'équations et d'inéquations

4.1 Egalités, équations

- Pour démontrer une égalité du type $A = B$, une méthode consiste à transformer l'écriture d'un côté du signe "=" pour obtenir l'autre côté.
- On peut également :
 - montrer que $A - B = 0$
 - transformer l'écriture de A et de B et trouver une expression C telle que $A = C$ et $B = C$

Exercice 19 :

Démontrer que quel que soit le réel x :

$$(2 - 3x)(x^2 - 3x - 6) + 4 - 9x^2 = (2 - 3x)(x + 2)(x - 2)$$

Exercice 20 :

Montrer que pour $x \neq 1$:

$$\frac{3x^2 - 4x + 1}{(x - 1)^2} = 3 + \frac{2}{x - 1}$$

Proposition

Un produit de facteur est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

$$A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

- Lorsqu'une équation se présente sous forme d'un produit nul, on cherche donc les valeurs de l'inconnue qui annulent chacun des facteurs.
On ne peut donc appliquer ce théorème que lorsque le second membre est 0.

Exercice 21 :

Résoudre les équations suivantes :

$$a) (x - 3)(-x - 1) = 0, \quad b) (3x - 4)^2 - 25 = 0, \quad c) \frac{(3x + 1)(x - 4)}{x^2 + 1} = 0$$

- Pour résoudre une équation, on remplace l'équation complète par une équation complète équivalente, obtenue par l'une des méthodes suivantes :
 - en transformant par le calcul le côté gauche ou le côté droit.
 - en ajoutant ou en retranchant aux deux côtés le même nombre.
 - en multipliant ou en divisant les deux côtés par le même nombre non nul.

Exercice 22 :

Résoudre les équations suivantes :

1. $2x + 3 = 5x - 2$

2. $\frac{2}{x + 1} = 4$

3. $\frac{2x - 1}{3x + 2} = 3$

Exercice 23 :

1. Démontrer que

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x - 1)(x + 2)(x - 2)$$

2. Résoudre l'équation :

$$x^3 + 4 = x^2 + 4x$$

Exercice 24 :

Soit c un réel de $]\frac{2}{3}; +\infty[$

Chercher en fonction de c la solution de l'équation

$$\frac{2x+1}{3x+2} = c$$

4.2 Inéquations

Proposition

- Si l'on ajoute ou si l'on soustrait un même nombre à chaque membre d'une inéquation, on obtient une inéquation équivalente (c'est à dire qui a les mêmes solutions).
- Si l'on multiplie ou si l'on divise chaque membre d'une inéquation par un même nombre strictement positif, on obtient une inéquation équivalente.
- Si l'on multiplie ou si l'on divise les deux membres d'une inéquation par un même nombre strictement négatif, on obtient une inéquation équivalente en changeant le sens de l'inégalité.

Exercice 25 :

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $-3x + 5 > 0$
2. $4x + 1 \geq -3x + 2$
3. $5x < 0$

Exercice 26 :

Trouver les entiers naturels n tels que

$$\frac{3n+5}{n+20} \geq 1$$

4.3 Systèmes linéaire de deux équations à deux inconnues

Définition

- On appelle système linéaire à 2 équations et 2 inconnues tout système de condition du type

$$\mathcal{S} \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

où a, b, a', b', c et c' sont des réels fixés.

- l'inconnue est le couple de réels (x, y) .
- Une solution du système est un couple de valeurs (x, y) pour lesquelles les 2 équations du système sont vérifiées.
- Résoudre $\mathcal{S}$ consiste à trouver l'ensemble des solutions de $\mathcal{S}$.
- Un système n'ayant aucune solution est dit impossible.

Exemple

$$\mathcal{S} \begin{cases} 2x + 5y = 2 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

est un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

Interprétation graphique :

Soit $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ deux droites d'équations respectives :

$$ax + by - c = 0 \quad \text{et} \quad a'x + b'y - c' = 0$$

Soit $M = (x_0; y_0)$ un point du plan. Dire que M est solution du système de deux équations à deux inconnues $\mathcal{S}$ revient à dire que le point M appartient à la fois à $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$.

On distingue alors trois cas :

- Si $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont parallèles et distinctes, le système $\mathcal{S}$ n'admet aucun couple solution.
- Si $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécantes, le système $\mathcal{S}$ admet une solution unique.
- Si $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont confondues, alors le système $\mathcal{S}$ admet une infinité de couples solutions.

Résolution d'un système par substitution

Il y a trois étapes dans la méthode par substitution :

- dans l'une des deux équations, on exprime x (ou y) en fonction de y (ou respectivement de x)
- dans la seconde équation, on substitue à x l'expression obtenue à l'étape précédente. On obtient alors une équation où il n'y a plus qu'une seule inconnue. On résout alors cette équation à une inconnue et trouve la valeur de l'inconnue.
- Dans la première équation, on remplace y par sa valeur. On se retrouve de nouveau avec une équation à une seule inconnue et on résout cette équation. On a ainsi trouvé le couple unique solution du système.

Exemple

On se propose de résoudre le système suivant :

$$\mathcal{S}_1 \begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

- première étape : dans la première équation, on exprime x en fonction de y .
Cela donne : $x = 2 - 3y$
- deuxième étape : dans la seconde équation, on substitue x par l'expression $2 - 3y$.
Cela donne : $2(2 - 3y) - y = 1$.
On obtient donc une équation à une seule inconnue qui ici est y .
On résout alors l'équation :

$$4 - 7y = 1 \Leftrightarrow 7y = 3 \Leftrightarrow y = \frac{3}{7}$$

- troisième étape : on remplace y par sa valeur dans la première équation :

$$x + 3 \times \frac{3}{7} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{14}{7} - \frac{9}{7} \Leftrightarrow x = \frac{5}{7}$$

Le système $\mathcal{S}_1$ admet pour unique solution le couple $\left(\frac{5}{7}; \frac{3}{7}\right)$

Résolution d'un système par combinaison linéaire

On peut distinguer 3 étapes pour cette méthode :

- On multiplie l'une des deux équations par un réel quelconque (positif ou négatif) afin que le coefficient de x (ou de y) soit le même ou l'opposé dans les deux équations.
- On additionne (ou on soustrait) membre à membre les deux équations afin que l'une des deux inconnues disparaissent. On se retrouve alors avec une équation à une seule inconnue que l'on résout.
On trouve ainsi l'une des deux inconnues.
- On remplace dans la première équation la valeur de l'inconnue trouvée précédemment. Il reste à résoudre une équation à une seule inconnue et on obtient ainsi le couple solution du système.

Exemple

On se propose de résoudre le système suivant :

$$\mathcal{S}_2 \begin{cases} 3x + y &= 10 \\ -9x - 2y &= 4 \end{cases}$$

- première étape : on multiplie la première équation par 3 ce qui nous donne

$$9x + 3y = 30$$

- deuxième étape : on ajoute membre à membre les deux équations ce qui nous donne :

$$y = 34$$

On constate que le facteur multiplicatif 3 a été choisi pour que, en ajoutant membre à membre, les x disparaissent.

- troisième étape : on remplace y par sa valeur dans la première équation ce qui nous donne

$$3x = 10 - 34 \Leftrightarrow x = -8$$

Le système $\mathcal{S}_2$ admet pour unique solution le couple $(-8, 34)$

Système n'admettant aucune solution

Un système sans solution est un système dont les deux équations ont le même premier membre et dont le deuxième membre est différent.

Exemple :

On se propose de résoudre le système suivant :

$$\mathcal{S}_3 \begin{cases} 3x - 2y &= 10 \\ 9x - 6y &= 24 \end{cases}$$

En multipliant par 3 la première équation on obtient

$$9x - 6y = 30$$

Or, pour tout couple $(x; y)$, le réel $9x - 6y$ ne peut être égale à la fois à 24 et à 30.

Le système $\mathcal{S}_3$ n'admet donc aucune solution.

Système admettant une infinité de solutions

Un système admettant une infinité de solutions est un système que l'on peut transformer afin d'obtenir un système dont les deux équations ont le même premier membre et le même deuxième membre.

Exemple :

On se propose de résoudre le système suivant :

$$\mathcal{S}_4 \begin{cases} 2x - y &= 7 \\ 8x - 4y &= 28 \end{cases}$$

En divisant par 4 la deuxième équation, on obtient :

$$2x - y = 7$$

Ce système se réduit alors à une équation à deux inconnues qui est : $2x - y = 7$

On donne alors à l'une des deux inconnues une valeur arbitraire, par exemple, à x . On en déduit alors la valeur de y :

$$y = 2x - 7$$

Le système admet donc pour solutions les couples de la forme $(x; 2x - 7)$, x étant un réel quelconque. Le système admet donc une infinité de solutions.

Remarque : graphiquement, tous les couples solutions de ce système sont les points situés sur la droite d'équation $y = 2x - 7$

Exercice 27 :

Résoudre les systèmes suivants :

$$\mathcal{S}_1 \begin{cases} x - 3y &= 2 \\ 2x - 7y &= 6 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_2 \begin{cases} 4x + 2y &= 10 \\ 3x + y &= 12 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_3 \begin{cases} 2x + 4y &= 20 \\ 3x + 3y &= 18 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_4 \begin{cases} 4x - 3y &= 2 \\ -8x + 6y &= 4 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_5 \begin{cases} 3x + 2y &= 5 \\ -6x - 4y &= -10 \end{cases}$$

Exercices : Calcul numérique et algébrique

1) Donner sous la forme de fraction irréductible :

$$A = \frac{5}{7} + \frac{4}{3} \quad B = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{5}} \quad C = \frac{\frac{4}{25}}{\frac{2}{5} - 6} \quad D = \frac{4}{3} - \frac{5}{7} \times \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3} \right) \quad E = \frac{\frac{2}{3} - \frac{2}{5}}{\frac{5}{9} - \frac{1}{3}} \quad F = \frac{3}{2 - \frac{2}{2 - \frac{2}{3}}}$$

2) Simplifier les expressions suivantes :

$$f(x) = 2 - \frac{x+1}{3} \quad g(x) = \frac{1}{x-3} - 7 \quad h(x) = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x+2} \quad i(x) = \frac{2x+3}{(x^2-4)(x+3)} - \frac{x-4}{(x^2-9)(x-2)}$$

3) Simplifier les expressions suivantes (n désigne un entier naturel) :

$$u_n = \frac{1}{\frac{5n}{2n+5}} - \frac{1}{n} \quad v_n = \frac{\frac{n^3 - 2n^2 + n}{2n-1}}{n} \quad w_n = \frac{\frac{n-3}{n+3} - 2}{2 \times \frac{n-3}{n+3} + 5}$$

4) Simplifier les expressions suivantes :

$$A = (2^3 \times 2^{-4})^2 \times (3^3)^2 \times 3^{-5} \quad B = \left(\frac{2}{3} \right)^2 \times 3^3 \quad C = \left(\frac{2}{3} \right)^{-2} \times \left(\frac{3}{4} \right)^4 \times \left(\frac{27}{4} \right)^{-1} \quad D = \frac{12^5 \times 35^{-2}}{49^{-3} \times 21^4}$$

5) Simplifier les expressions suivantes (n désigne un entier naturel) :

$$u_n = 2 \times 2^n \quad v_n = \frac{2^n}{2} \quad w_n = 3 \times 2^n + 6 \times 2^{n+1} - 2^{n+2} \quad s_n = \frac{3}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} \quad t_n = \frac{3 \times 4^{n+1}}{6 \times 2^n}$$

6) Simplifier

$$A = \sqrt{2} \times \sqrt{6} \quad B = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}} \quad C = \sqrt{7^4 \times 5^3} \quad D = \sqrt{12} - \sqrt{108} \quad E = 7\sqrt{5} - \sqrt{20} - \sqrt{45}$$
$$F = \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{\sqrt{3}} \quad G = \frac{1 - \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}}$$

7) Développer et réduire les expressions suivantes :

$$f(x) = (2x + 5)(x - 3) \quad g(x) = (2x + 3)^2 \quad h(x) = (2x + 5)(x + 3)$$

$$i(x) = (x + 2)(3x - 1) - 3(3x - 1) \quad j(x) = (2 - x)(3x + 2) - (9x - 4)(6x + 2)$$

8) Factoriser les expressions suivantes :

$$f(x) = (2x + 5)(x - 3) - (2x + 5)(x + 1) \quad g(x) = 2x + 8 - (x + 4)(2x - 3) \quad h(x) = 49x^2 - 16$$

$$i(x) = 36x^2 - (x + 1)^2 \quad j(x) = (3x + 2)(2x + 1) - (2x + 1)^2 \quad k(x) = 49x^2 - 16 + (7x + 4)(3x + 2)$$

9) Résoudre les équations suivantes :

$$a) x = \frac{1}{2}x + 1 \quad b) 2x - 3 = 5x + 2 \quad c) \frac{2x + 3}{2} = 3x + 4 \quad d) \frac{4}{x + 2} = 1 \quad d) \frac{(2x + 3)(2x + 4)}{x + 1} = 0$$

$$e) 4x^2 = 9 \quad f) 3x^2 - 2x = 0 \quad g) x^2 + 2x + 1 = 0 \quad h) (x + 2)^2 = 4 \quad i) \frac{5}{x + 3} - \frac{1}{x} = \frac{2x - 1}{x^2 + 3x}$$

10) Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\mathcal{S}_1 \begin{cases} 6x + y = 8 \\ 10x + 7y = -8 \end{cases}, \quad \mathcal{S}_2 \begin{cases} 7x + 4y = -5 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_3 \begin{cases} 5x - 2y = -7 \\ 3x + y = -2 \end{cases}, \quad \mathcal{S}_4 \begin{cases} 2x + 5y = 3 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases}$$

11) Le but de cet exercice est de montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel (c'est à dire n'appartient pas à $\mathbb{Q}$).

1. Soit n un entier impair. Montrer que n^2 est impair.

En déduire que si n est un entier tel que n^2 est pair alors n est pair.

2. Supposons qu'il existe deux entiers p et q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

On suppose de plus que p et q choisis de telle sorte que la fraction $\frac{p}{q}$ soit irréductible.

(a) Justifier que p^2 est pair puis montrer que p est pair.

(b) En écrivant p sous la forme $2k$ ou k est un entier naturel, montrer que q est également pair.

(c) Conclure