

Fonctions numériques - limites et continuité - compléments

1 Limites et relation d'ordre

1.1 Existence d'une limite par encadrement

Proposition : Théorème d'encadrement

 a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ Soient l un réel, f , g et h trois fonctions vérifiant :

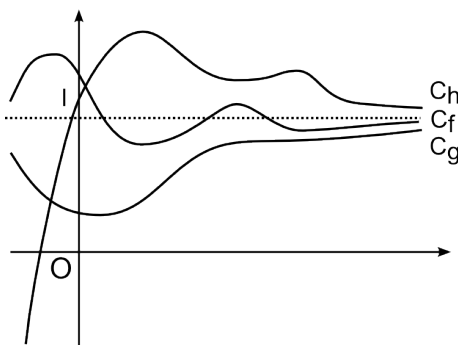
- Au voisinage de a

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$

Alors f admet une limite en a et

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

Exercice 1 :

On considère la fonction partie entière qui à tout réel x associe le seul nombre entier, noté $\lfloor x \rfloor$, défini par :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x+1}$

2. On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

(a) Exprimer $f(x)$ pour $x > 1$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

(b) Montrer que :

$$\forall x > 0, \quad 1 - x < f(x) \leq 1$$

En déduire que f admet une limite à droite en 0.

Proposition : Théorème d'encadrement

a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$

Soient l un réel, f, g deux fonctions vérifiant :

- Au voisinage de a $|f(x) - l| \leq g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

Alors f admet une limite en a et

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

Démonstration

En effet :

$$\begin{aligned} |f(x) - l| &\leq g(x) \\ \Leftrightarrow -g(x) &\leq f(x) - l \leq g(x) \\ \Leftrightarrow l - g(x) &\leq f(x) \leq l + g(x) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} l - g(x) = l \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} l + g(x) = l$$

On conclut donc avec la première version du théorème d'encadrement.

Remarques

Cette proposition signifie que si la distance entre f et l est majorée par une fonction qui tend vers 0, alors la distance entre f et l tend également vers 0 et donc f tend vers l .

Exemple

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x > 0, \quad |f(x) + 2| \leq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ donc par encadrement } \lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x) + 2| = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$$

1.2 Théorème de comparaison

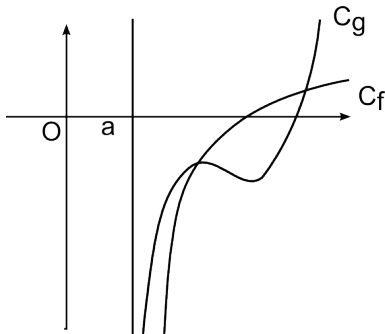
Proposition : Théorème de comparaison

Soit a un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$

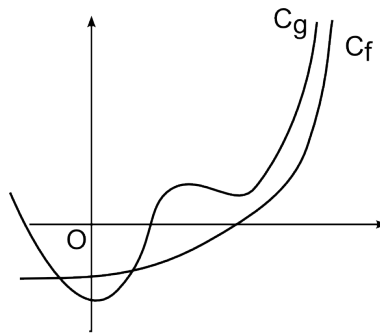
Soient f et g deux fonctions vérifiant au voisinage de a :

$$f(x) \leq g(x)$$

- si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$.
- si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$



$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

Exercice 2 :

Soit f une fonction vérifiant pour tout $x > 1$

$$\frac{1}{x-1} \leq f(x)$$

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

Exercice 3 :

Soit g une fonction vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) \leq -x^4 + 3x^2 + 2x - 1$$

Déterminer la limite de g en $+\infty$ et en $-\infty$

Exercice 4 :

On reprend la fonction partie entière. On rappelle que pour tout réel x on a :

$$\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$$

Déterminer la limite de la fonction partie entière en $+\infty$ et en $-\infty$

1.3 Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre

Proposition : passage à la limite dans les inégalités

Soit a un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ Soient l et l' deux réels et f et g deux fonctions vérifiant :

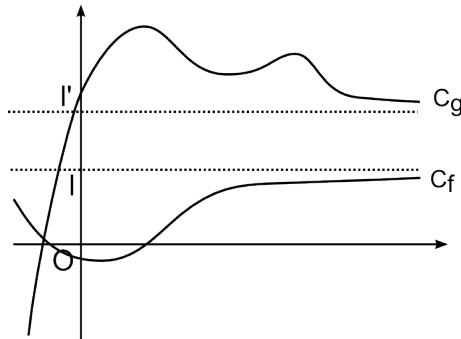
- Au voisinage de a

$$f(x) \leq g(x)$$

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$

Alors

$$l \leq l'$$



Exemple

Soit f une fonction vérifiant :

$$\forall x > 0, \quad 0 < f(x) < 2 + \frac{1}{x+1} \quad (*)$$

On suppose que f admet une limite finie l en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x+1} = 2$$

En passant à la limite dans la relation $(*)$ on obtient

$$0 \leq l \leq 2$$

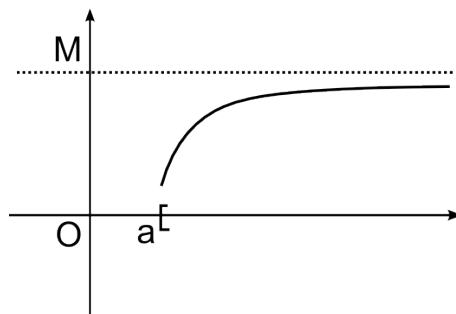
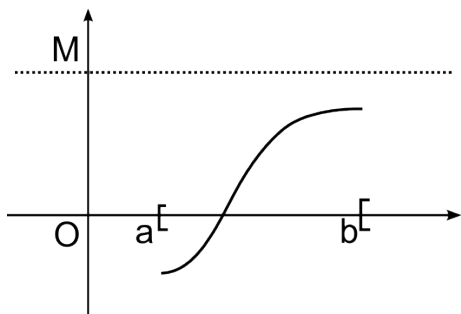
Remarque

Les inégalités strictes deviennent larges par passage à la limite.

1.4 Théorème de la limite monotone

Proposition : Théorème de la limite monotone

- Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I = [a, b[$ ou $]a, b[$ ($a < b$) à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Si f est croissante et majorée sur I alors f admet une limite finie en b .
- Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I = [a, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Si f est croissante et majorée sur I alors f admet une limite finie en $+\infty$.



f croissante majorée

Exemple

Soit f la fonction définie par morceaux sur $[1; +\infty[$ par :

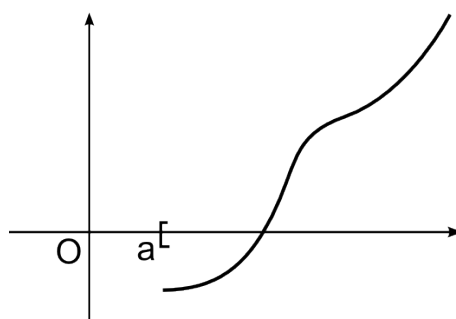
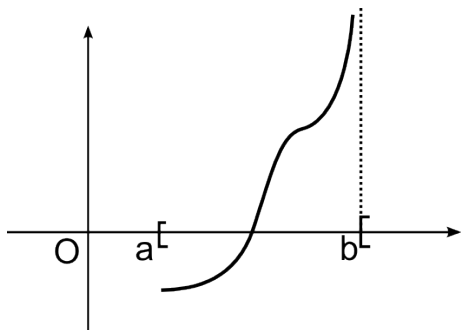
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(x) = 1 - \frac{1}{n} \text{ sur } [n; n+1[$$

La fonction f est croissante majorée par 1 sur $[1; +\infty[$ donc f admet une limite finie en $+\infty$

Proposition

Soit f une fonction croissante sur l'intervalle $I = [a, b[$ (respectivement sur $[a, +\infty[$) à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si f n'est pas majorée sur I alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$)



f croissante non majorée

Remarques

1. On déduit du théorème que :

Soit f une fonction croissante sur $]a, b[$ (b fini ou $+\infty$) :

- Soit f est majorée et alors f a une limite finie en b .
- soit $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$

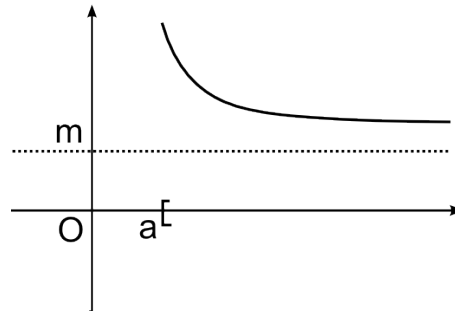
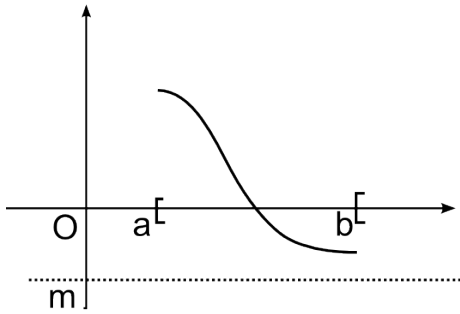
2. Attention ce théorème donne l'existence de la limite de la fonction f mais pas sa valeur.

Une fonction croissante majorée ne converge pas forcément vers le majorant trouvé.

On a des résultats analogues pour les fonctions décroissantes :

Proposition : Théorème de la limite monotone

- Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I = [a, b[$ ou $]a, b[$ ($a < b$) à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Si f est décroissante et minorée sur I alors f admet une limite finie en b .
- Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I = [a, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Si f est décroissante et minorée sur I alors f admet une limite finie en $+\infty$.

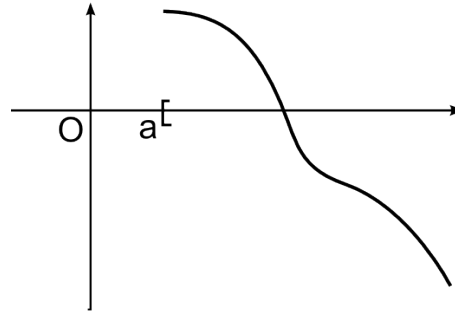
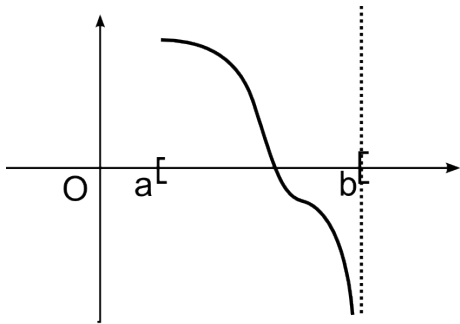


f décroissante minorée

Proposition

Soit f une fonction décroissante sur l'intervalle $I = [a, b[$ (respectivement sur $[a, +\infty[$) à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si f n'est pas minorée sur I alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = -\infty$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$)



f décroissante non minorée

Remarque

On déduit du théorème que :

Soit f une fonction décroissante sur $]a, b[$ (b fini ou $+\infty$) :

- Soit f est minorée et alors f a une limite finie en b .
- soit $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = -\infty$

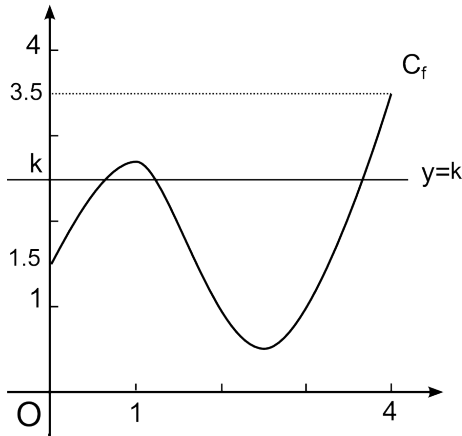
On verra une application de ces théorèmes lors de l'étude des intégrales généralisées.

2 Continuité sur un intervalle

2.1 Equation $f(x) = k$

Une approche :

Les trois exemples ci-dessous représentent trois fonctions f , g et h définies sur l'intervalle $I = [0, 4]$.



f est continue sur $[0, 4]$.

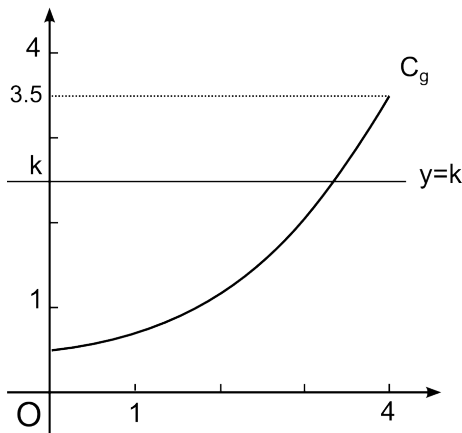
$f(0) = 1.5$ et $f(4) = 3.5$.

f prend au moins une fois toutes les valeurs comprises entre 1.5 et 3.5.

En effet si $k \in [1.5; 3.5]$ la droite d'équation $y = k$ coupe $\mathcal{C}_f$ en au moins un point.

L'équation $f(x) = 2$ admet trois solutions.

L'équation $f(x) = 3$ admet une seule solution.

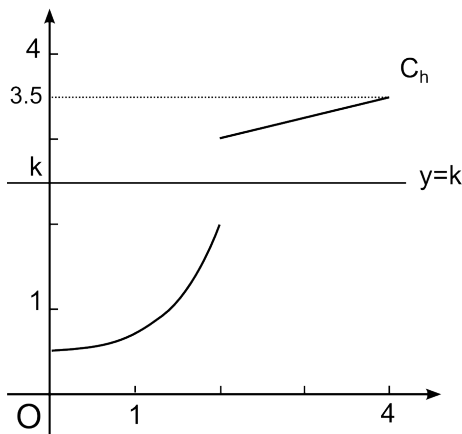


g est continue et strictement croissante sur $[0; 4]$.

g prend une fois et une seule toute valeur k comprise entre $g(0) = 0.5$ et $g(4) = 3.5$.

Pour $k \in [0.5; 3.5]$ la droite d'équation $g(x) = k$ coupe la courbe $\mathcal{C}_g$ en un seul point.

L'équation $g(x) = k$ admet donc une unique solution.



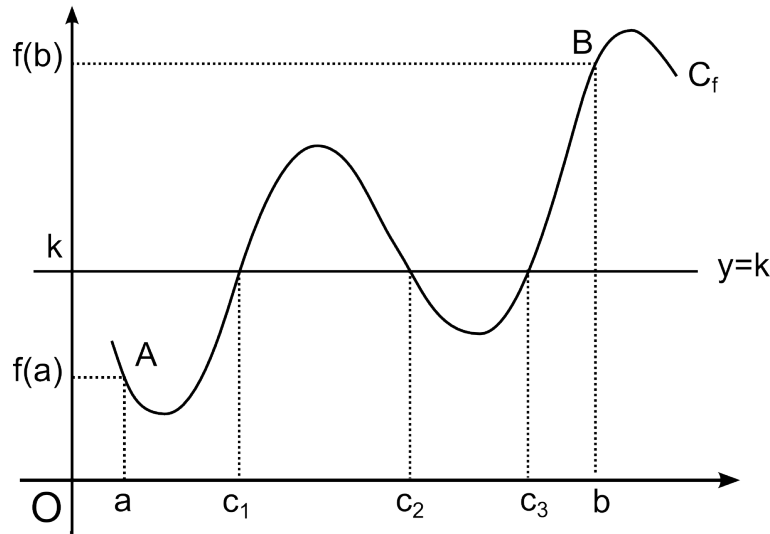
h n'est pas continue sur $[0; 4]$.

Ici h ne prend pas toutes les valeurs entre $h(0)$ et $h(4)$.

La droite d'équation $y = 2.5$ ne coupe pas la courbe $\mathcal{C}_h$.

L'équation $h(x) = 2.5$ n'a pas de solution.

2.2 Théorème des valeurs intermédiaires



Soit f une fonction continue sur un intervalle I de courbe représentative $\mathcal{C}_f$.
Soient a et b deux réels de I et soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ sont donc situés de part et d'autre de la droite d'équation $y = k$.
La courbe $\mathcal{C}_f$ se trace sans lever le crayon et coupe la droite $y = k$ en au moins un point.
(Sur le graphique il y a trois points d'intersection d'abscisses c_1 , c_2 et c_3 .)

Autrement dit si la fonction f , continue sur I , passe de la valeur $f(a)$ à la valeur $f(b)$, alors elle passe au moins une fois par toutes les valeurs k intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$.

Proposition : théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a et b deux réels de I .

Pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un réel c compris entre a et b tel que

$$f(c) = k$$

Autrement dit si k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation

$$f(x) = k$$

admet au moins une solution sur $[a, b]$.

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$$

Montrer que f s'annule au moins une fois sur $[0; 2]$.

Proposition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et qui change de signe sur I .
Alors f s'annule au moins une fois sur I .

2.3 Image d'un intervalle par une application continue

On rappelle que si f est une fonction définie sur un intervalle I , l'image de I par f est l'ensemble noté $f(I)$

$$f(I) = \{f(x), x \in I\}$$

(ensemble des images par f des éléments de I .)

Définition

On appelle segment tout intervalle de $\mathbb{R}$ fermé et borné, c'est à dire un intervalle de la forme $[a, b]$ avec $a \leq b$

Proposition

Si une fonction f est continue sur le segment $[a, b]$ alors f est bornée sur le segment $[a, b]$ et atteint ses bornes.

Autrement dit il existe deux réels c et d de $[a, b]$ tels que :

$$\forall x \in [a, b], \quad f(c) \leq f(x) \leq f(d)$$

Remarque

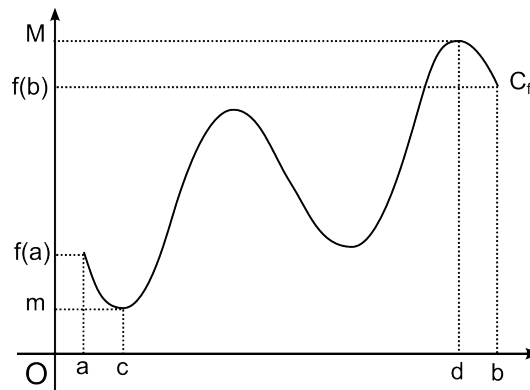
Ce théorème annonce que f admet un maximum et un minimum sur $[a, b]$.

De plus en notant m le minimum de f sur $[a, b]$ et M le maximum de f sur $[a, b]$ alors pour tout x de $[a, b]$ on a $m \leq f(x) \leq M$

Ceci a pour conséquence le théorème suivant :

Proposition

L'image d'un segment $[a; b]$ par une application continue est un segment $[m; M]$.



Remarques

- M est le maximum de f sur $[a; b]$ et m est le minimum de f sur $[a; b]$.
- Il existe un réel $c \in [a; b]$ tel que $m = f(c)$
- Il existe un réel $d \in [a; b]$ tel que $M = f(d)$

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

1. Déterminer le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les intervalles suivants :

$$f([-1; 1]) \quad f([-2; 0]) \quad f([-2; 3])$$

2.4 Fonctions continues strictement monotones sur un intervalle

2.4.1 Théorème de la bijection

Proposition

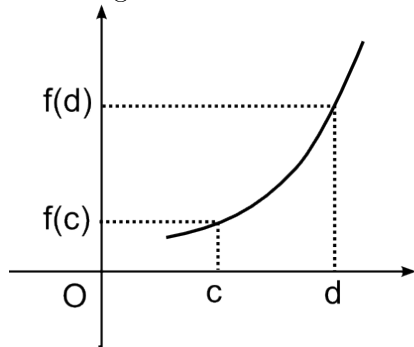
Soit f une fonction continue strictement monotone sur $[a; b]$.
Alors pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation

$$f(x) = k$$

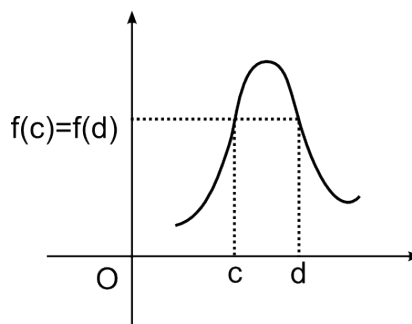
admet une unique solution dans $[a; b]$

Remarques

- L'existence de la solution vient du théorème des valeurs intermédiaires.
L'unicité provient de ce que, pour une fonction strictement monotone, deux réels distincts ont des images distinctes :

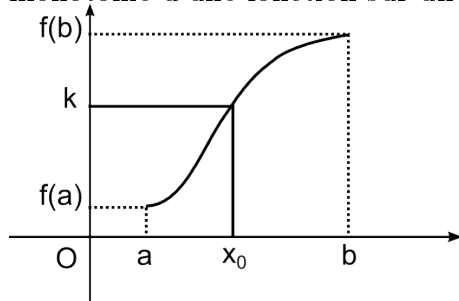


f strictement croissante

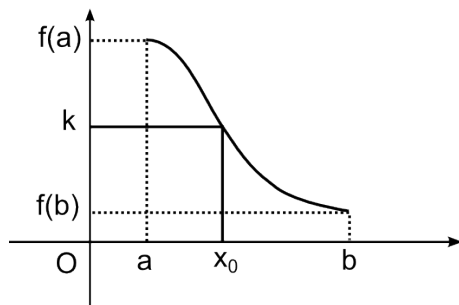


f non monotone

- Dans un tableau de variation, les flèches obliques traduisent la continuité et la stricte monotonie d'une fonction sur un intervalle :



x	a	x_0	b
$f(x)$	$f(a)$	k	$f(b)$



x	a	x_0	b
$f(x)$	$f(a)$	k	$f(b)$

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[a; b]$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $[-3; 6]$ par

$$f(x) = x^3 - 12x$$

Son tableau de variation est le suivant :

x	-3	-2	2	6
$f(x)$	9	16	-16	144

Cherchons le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 5$.

- f est continue et strictement croissante sur $[-3; -2]$.
Pour tout $x \in [-3; -2]$, $9 \leq f(x) \leq 16$
Donc l'équation $f(x) = 5$ n'a pas de solution sur $[-3; -2]$.
- f est continue et strictement décroissante sur $[-2; 2]$.

$$5 \in f([-2; 2]) = [f(2); f(-2)] = [-16; 16]$$

donc l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution sur $[-2; 2]$.

- f est continue et strictement croissante sur $[2; 6]$.

$$5 \in f([2; 6]) = [f(2); f(6)] = [-16; 144]$$

donc l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution sur $[2; 6]$.

- Au final, l'équation $f(x) = 5$ admet exactement deux solutions sur $[-3; 6]$.

Cas particulier de l'équation $f(x) = 0$

Proposition

Soit f une fonction continue strictement monotone sur $[a; b]$ vérifiant $f(a)f(b) < 0$,
alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]a; b[$

Remarque

Cette propriété s'étend à des intervalles de la forme $]a, b[$, $[a, +\infty[$ ou $] -\infty, b]$ en considérant les limites au bord.

Exercice 7 :

Montrer que l'équation $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]2, +\infty[$.

2.4.2 Recherche d'une valeur approchée de l'équation $f(x) = k$ algorithme de dichotomie

On a montré que l'équation $x^3 - 12x = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[2, 6]$ que l'on note α .

On cherche à construire un intervalle d'amplitude 10^{-2} contenant α .

On a pour l'instant :

$$\alpha \in [2, 6]$$

L'idée est de diviser l'amplitude de l'intervalle précédent par 2 à chaque étape.

Pour cela on calcule l'image par f du milieu de l'intervalle.

$$f\left(\frac{2+6}{2}\right) = f(4) = 16 > 5$$

donc

$$f(2) \leq f(\alpha) \leq f(4) \quad \text{et} \quad \alpha \in [2, 4]$$

On recommence :

$$f\left(\frac{2+4}{2}\right) = f(3) = -9 < 5$$

$$f(3) \leq f(\alpha) \leq f(4) \quad \text{et} \quad \alpha \in [3, 4]$$

$$f\left(\frac{3+4}{2}\right) = f(3.5) = 0.875 < 5$$

$$f(3.5) \leq f(\alpha) \leq f(4) \quad \text{et} \quad \alpha \in [3.5, 4]$$

On itère le processus tant que la longueur de l'intervalle est supérieure à 0.01.

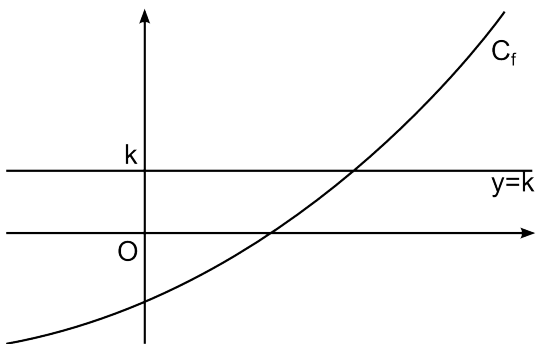
Écrivons un script Python pour calculer l'intervalle cherché :

```
1. a=2
2. b=6
3. while b-a >0.01 :
4.     m=(a+b)/2
5.     if m**3-12*m>5 :
6.         b=m
7.     else :
8.         a=m
9. print(a,'<alpha<',b)
```

L'exécution du programme précédent renvoie

3.6484375 <alpha< 3.65625

2.4.3 Fonctions bijectives

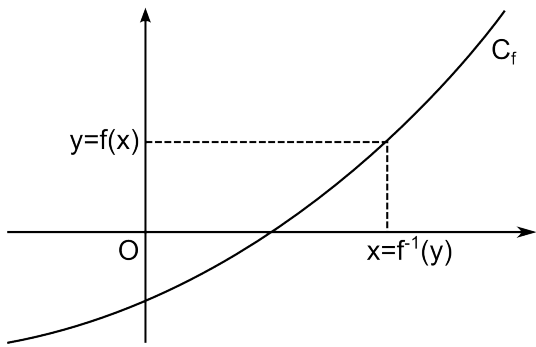


Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I .

Alors $f(I) = J$ est un intervalle.

Pour tout $k \in J$ l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur I .

Graphiquement pour tout réel k de J , la droite d'équation $y = k$ coupe la courbe représentative de f en un seul point.



f réalise donc une bijection de I sur J .
On peut construire une fonction définie sur J qui à tout réel y de J associe l'unique solution sur I de l'équation $f(x) = y$.
Cette fonction est appelée fonction réciproque de f et notée f^{-1} .

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in J \end{cases}$$

Remarque

Soit f une bijection de I sur J et f^{-1} sa bijection réciproque.

$$\forall x \in I, \quad f^{-1} \circ f(x) = x$$

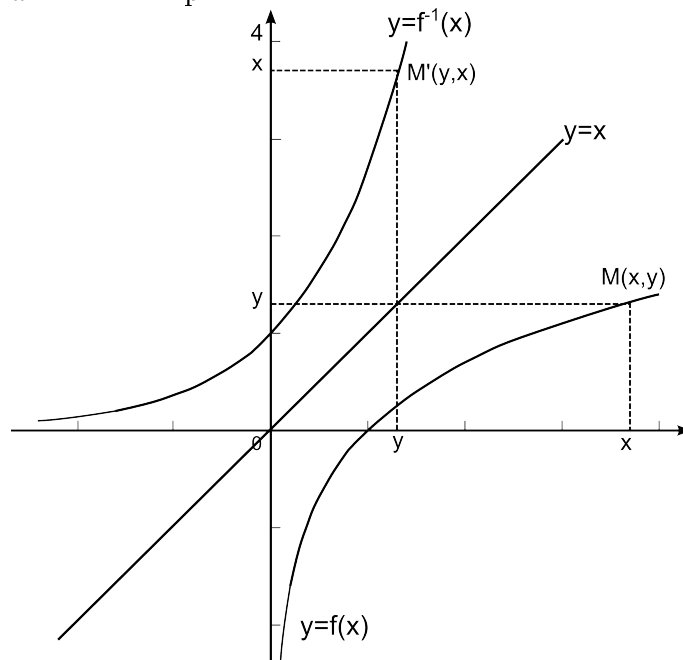
$$\forall y \in J, \quad f \circ f^{-1}(y) = y$$

Proposition

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I .

1. f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$.
2. Sa bijection réciproque f^{-1} est une fonction continue, strictement monotone sur J de même sens de variation que f .
3. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, les courbes représentatives de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$

- On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ les courbes représentant respectivement les fonctions f et f^{-1} , et Δ la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormal.



- Soit $M(x; y)$ un point de $\mathcal{C}_f$. On a alors

$$y = f(x)$$

Mais alors

$$x = f^{-1}(y)$$

et le point $M'(y; x)$ appartient à $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.

Les points $M(x; y)$ et $M'(y; x)$ sont symétriques par rapport à Δ .

- La courbe $\mathcal{C}_f$ est la symétrique de la courbe $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ par rapport à Δ .

Exemples :

1. Soit $f(x) = x^2$ définie sur $[0; +\infty[$

f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $f([0; +\infty[) = [f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [0; +\infty[$.

Sa bijection réciproque est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

En effet

$$f(x) = x^2 = y \Leftrightarrow x = \sqrt{y} = f^{-1}(y)$$

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ x & \longrightarrow & y = x^2 \\ x = \sqrt{y} & \longleftarrow & y \\ & f^{-1} & \end{array}$$

2. Plus généralement, la fonction $g(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Elle réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[0; +\infty[$.

Pour tout réel positif ou nul y l'équation $x^n = y$ admet un unique solution dans $[0; +\infty[$.

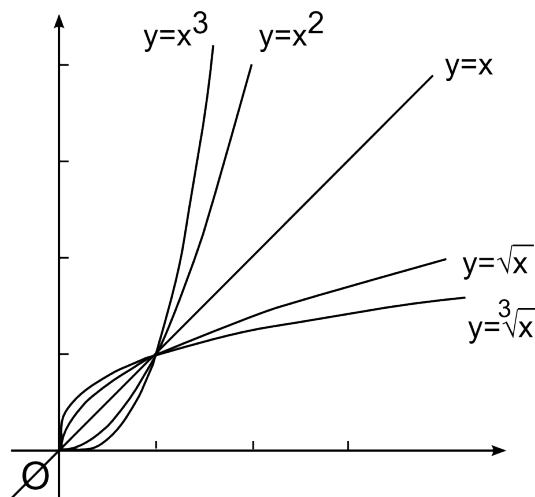
Sa bijection réciproque g^{-1} est définie sur $[0; +\infty[$ et est appelée fonction racine n -ième.

On note $g^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$

$$g^{-1} \left(\begin{array}{ccc} [0; +\infty[& \longrightarrow & [0; +\infty[\\ y & \longmapsto & \sqrt[n]{y} \end{array} \right)$$

On a pour tous réels x et y positifs

$$x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$$



Exercice 8 :

Soit f la fonction définie sur $]3; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x-4}{x-3}$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $]3; +\infty[$ sur $] -\infty; 1[$.
2. Montrer que pour tout $x \in]3; +\infty[$ et pour tout $y \in] -\infty; 1[$

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{-3y+4}{1-y}$$

3. En déduire la fonction réciproque f^{-1}

Fonctions numériques - limites et continuité : exercices

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

1. Donner le tableau de variation de f .
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions réelles c_1 , c_2 et c_3 avec $c_1 < c_2 < c_3$.
3. Montrer que $1 < c_3 < 2$
4. Donner le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
5. Compléter l'algorithme de dichotomie suivant afin qu'il renvoie un intervalle d'amplitude inférieure à 0.01 contenant le réel c_3 :

```
1. a=....
2. b=....
3. while b-a > 0.01:
4.     m=(a+b)/2
5.     if m**3-3*m-1<0 :
6.         a=m
7.     else :
8.         b=m
9. print(a,'<c3<',b)
```

2) Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que :

$$\forall x \in [0,1], f(x) \in [0,1]$$

1. On considère alors la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(x) = f(x) - x$.
En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[0,1]$
2. En déduire que l'équation

$$f(x) = x$$

admet au moins une solution sur $[0,1]$

3)

1. (a) Etablir le tableau de variation de la fonction $f(x) = x^3 + 5x$ définie sur $\mathbb{R}$. On donnera en particulier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
(b) En déduire que l'équation $x^3 + 5x = 9$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ que l'on notera α .
(c) Justifier que α appartient à l'intervalle $[1;2]$.
 2. Montrer que l'équation $x^2 + \sqrt{x} - 3 = 0$ admet une unique solution a sur $\mathbb{R}_+$ et encadrer a par deux entiers consécutifs.
-

4) Soit f la fonction définie sur $[0;2]$ par $f(x) = x^2 + x - 1$.

1. Donner le tableau de variation de f .
2. Montrer que f réalise une bijection de $[0;2]$ sur $[-1;5]$
3. Soit $y \in [-1;5]$. En partant de la relation $y = x^2 + x - 1$, exprimer x en fonction de y .
4. En déduire la bijection réciproque f^{-1} de f .

5) On définit la fonction f sur $[-6; 9]$ par son expression :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 2.$$

Partie A - Étude mathématique

1. Dresser le tableau de variations complet de f sur $[-6; 9]$.
2. Combien l'équation $f(x) = 0$ admet-elle de solutions sur $[-6; 9]$? Justifier la réponse.

Partie B - Méthode pas à pas On va chercher à déterminer une valeur approchée de la solution α de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[-6; -3]$.

1. Rappeler le sens de variation de f sur cet intervalle.
2. Quel est le signe de $f(-6) \times f(-3)$?
3. On donne la valeur : $f(-4, 5) \approx 52, 63$.
 - (a) En déduire des valeurs de a et b telles que $\alpha \in [a; b]$.
 - (b) Que peut-on dire du signe de $f(-6) \times f(-4, 5)$?
4. On donne la valeur : $f(-5, 25) \approx 10, 86$.
 - (a) En déduire des valeurs de a et b telles que $\alpha \in [a; b]$.
 - (b) Que peut-on dire du signe de $f(-6) \times f(-5, 25)$?
5. Quelles conditions a et b doivent-ils vérifier pour que l'intervalle $[a; b]$ contienne α et en donne une approximation au centième ?

Partie C - Résolution avec Python

1. Compléter l'algorithme Python suivant qui permet de donner une approximation au centième de α . On appelle cet algorithme un **algorithme de dichotomie**.

```
1. import numpy as np
2. def f(x) :
3.     return ....
4. a=....
5. b=....
6. while b-a .... :
7.     m=....
8.     if f(a)*f(m)<=0 :
9.         .....
10.    else :
11.        ....
12. print(....)
```

6) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - x - 1$$

1. Compléter le script Python suivant afin qu'il affiche cette fonction sur l'intervalle $[0, 4]$.

```
1. import numpy as np
2. import matplotlib.pyplot as plt
3. def f(x) :
4.     return .....
5. x=np.linspace(....)
6. plt.plot(....)
```

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée c sur l'intervalle $[1, 2]$.
3. Nous allons approcher c par dichotomie. On veut construire deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vont converger vers la valeur de c . Ces suites sont définies par $a_1 = 1$, $b_1 = 2$ et par les relations suivantes :
 - Si $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$ alors $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.
 - Sinon, $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$.

Compléter la fonction Python suivante qui prend en entrée un entier n et qui calcule et renvoie les valeurs de a_n et b_n .

```

1. def dichotomie(n) :
2.     a = 1
3.     b = 2
4.     for k in range(n):
5.         if f((a+b)/2) < 0 :
6.             a = (a+b)/2
7.         else :
8.             b = (a+b)/2
9.     return a, b

```

4. Que vaut $b_n - a_n$ pour une valeur de n donnée ?
5. Rédiger une fonction similaire utilisant une boucle *while* à la place de la boucle *for* en donnant cette fois ci une condition d'arrêt sur la valeur de $b_n - a_n$, c'est à dire une valeur r telle que l'algorithme s'arrête dès que $b_n - a_n \leq r$:

```

1. def dichotomie2(r) :
2.     a = 1
3.     b = 2
4.     while b - a > r :
5.         if f((a+b)/2) < 0 :
6.             a = (a+b)/2
7.         else :
8.             b = (a+b)/2
9.     return a, b

```

7) On considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par : $\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x) = \frac{x^2}{2x - 1}$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Varations de f
 - (a) Soit $x \in [1, +\infty[$. Calculer $f'(x)$.
 - (b) Préciser le sens de variation de f sur $[1, +\infty[$.
2. Etude d'une réciproque
 - (a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.
 - (b) Soit $t \in [1, +\infty[$. Prouver que l'équation $x^2 - 2tx + t = 0$ (d'inconnue x) admet des solutions réelles et les donner.
 - (c) Soit $t \in [1, +\infty[$. Déterminer l'unique réel $x \in [1, +\infty[$ tel que $f(x) = t$.

8) Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

1. Montrer que f est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[0, 1[$.
2. Soit g la fonction définie sur $[0, 1[$ par :

$$\forall y \in [0, 1[, \quad g(y) = \sqrt{\frac{1}{1-y}}$$

- (a) Montrer que $\forall y \in [0, 1[, \quad g(y) \in (1, +\infty[$.
 - (b) Montrer que $\forall y \in [0, 1[, \quad f(g(y)) = y$
et $\forall x \in [1, +\infty[, \quad g(f(x)) = x$
-

9) Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - \sqrt{x}$$

Et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Partie A- Questions préliminaires

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par

$$g(x) = 4x\sqrt{x} - 1$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Justifier que g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer $g'(x)$ sur cet intervalle.
3. Etudier le signe de $g'(x)$ sur $]0; +\infty[$ et établir le tableau de variation de g sur $[0; +\infty[$.
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0; +\infty[$ que l'on notera α .
Montrer que $0 < \alpha < 1$.
5. Recopier et compléter l'algorithme de dichotomie ci-dessous écrit à l'aide de **Python** afin qu'il affiche un encadrement de α à 10^{-2} près .

```
1. def g(x) :  
2.     return ....  
3. a=....  
4. b=....  
5. while b-a .... :  
6.     m=....  
7.     if g(a)*g(m)<=0 :  
8.         .....  
9.     else :  
10.        .....  
11. print(.....)
```

6. En déduire le signe de la fonction g sur $[0; +\infty[$. On distinguera les cas $x < \alpha$, $x = \alpha$ et $x > \alpha$.

Partie B - Etude de la fonction f

1. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a :

$$f(x) = x^2 \left(1 - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right)$$

- (b) En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Pour tout $x > 0$, montrer que

$$f'(x) = \frac{g(x)}{2\sqrt{x}}$$

et justifier que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

3. En déduire le tableau complet des variations de la fonction f en y faisant apparaître le réel α définie au A.4.

$$\text{Montrer que } f(\alpha) = \alpha^2 - \frac{1}{4\alpha}$$

4. Déterminer l'équation de la tangente Δ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
5. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ ainsi que dans un repère orthonormé ; On fera figurer les tangentes à $\mathcal{C}$ aux point d'abscisses α et 1.
(on donne $\alpha \approx 0.4$ et $f(\alpha) \approx -0.5$)
On prendra comme échelle 4cm en abscisse et 2cm en ordonnée.