

Fonctions logarithme et exponentielle

1 Fonction logarithme

1.1 Définition, étude de la fonction logarithme

1.1.1 Définition

Notion de primitive

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On peut avoir à chercher une fonction F sur I admettant f comme fonction dérivée.

Une telle fonction est appelée primitive de f sur I .

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On appelle primitive de f sur I toute fonction F telle que :

- F est dérivable sur I
- $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$

Exemple :

Soit $f(x) = x^3 + 6x^2 - 2x + 1$ et $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x^3 - x^2 + x - 2$.

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec pour tout $x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$.

F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Cette fonction usuelle est continue et admet des primitives sur $]0; +\infty[$

Définition

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $]0; +\infty[$ et qui s'annule en 1.

Remarques :

- La fonction logarithme népérien de x se note $\ln(x)$ ou $\ln x$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.
- La fonction logarithme népérien correspond à la touche $\boxed{\ln}$ de la calculatrice.
- A l'aide de la calculatrice on obtient :

$$\ln(2) \approx 0.69, \quad \ln(4) \approx 1.39, \quad \ln(5) \approx 1.61$$

- La fonction logarithme est disponible en Python dans la librairie `numpy` avec la commande suivante :

```
import numpy as np
np.log(x)
```

1.1.2 Sens de variation et signe

Proposition

- $\ln(1) = 0$
- la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

- la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$
- tableau de variation :

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$		0	

- signe de la fonction $\ln$:

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$	-	0	+

Remarques

- Pour tout réel x strictement positif :

$$\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

- De la stricte croissance de la fonction $\ln$ sur $]0; +\infty[$ on obtient :
pour tous réels a et b strictements positifs

$$\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$$

$$\ln(a) > \ln(b) \Leftrightarrow a > b$$

1.1.3 Courbe représentative

Le point d'abscisse 1

On sait que $\ln(1) = 0$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ donc $\ln'(1) = 1$

La courbe représentative de la fonction $\ln$ passe par le point $A(1, 0)$.

La tangente à la courbe en A a pour équation

$$y = 1(x - 1) + 0 = x - 1$$

Approximation affine en 1

On déduit du résultat précédent

pour x proche de 1, $\ln(x) \approx x - 1$

pour h proche de 0, $\ln(1 + h) \approx h$

Concavité

Si $f(x) = \ln(x)$, f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

donc la fonction $\ln$ est concave sur $]0, +\infty[$.

En particulier la courbe de la fonction $\ln$ est en dessous de ses tangentes et au dessus de ses cordes.

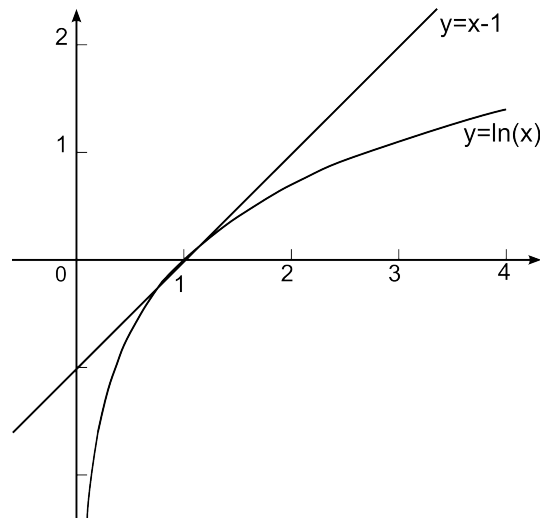
Tableau de valeurs

On a le tableau suivant :

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.5	2	3	4	6	8
$\ln(x)$	-1.6	-0.9	-0.5	-0.2	0	0.4	0.7	1.1	1.4	1.8	2.1

Courbe représentative

On en déduit la courbe représentative de la fonction $\ln$:



1.2 Propriétés algébriques

1.2.1 Logarithme d'un produit

Proposition

Pour tous réels a et b strictement positifs

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

Démonstration

Soit $a > 0$ et f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(ax) - \ln(a) - \ln(x)$$

$$f'(x) = a \times \frac{1}{ax} - \frac{1}{x} = 0 \quad \text{donc } f \text{ est constante.}$$

$$f(1) = \ln(a) - \ln(a) - \ln(1) = 0 \quad \text{donc pour tout } x > 0 \quad f(x) = 0.$$

$$\ln(ax) - \ln(a) - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(ax) = \ln(a) + \ln(x).$$

D'où le résultat en remplaçant x par b .

Remarque

Cette propriété se généralise au cas d'un produit de trois, quatre,... facteurs.

$$\ln(a \times b \times c) = \ln(a) + \ln(b) + \ln(c)$$

Exemples :

1. $\ln(8) + \ln(5) + \ln\left(\frac{1}{4}\right) = \ln\left(8 \times 5 \times \frac{1}{4}\right) = \ln(10)$
2. $\ln(3) + \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(3 \times \frac{1}{3}\right) = \ln(1) = 0$

1.2.2 Logarithme d'un inverse, d'un quotient

Proposition

$$\text{pour tout réel } a > 0, \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

$$\text{pour tous réels } a \text{ et } b \text{ strictement positifs} \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

Démonstration

- $1 = a \times \frac{1}{a}$ donc $\ln(1) = \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right)$ avec $\ln(1) = 0$
d'où $\ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = 0$ et $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

Exemples :

1. $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$
2. $\ln(6) + \ln(2) - \ln(12) = \ln\left(\frac{6 \times 2}{12}\right) = \ln(1) = 0$
3. Soit $a > 1$, $\ln\left(\frac{a+1}{a-1}\right) = \ln(a+1) - \ln(a-1)$

1.2.3 Logarithme d'une puissance, d'une racine carrée

Proposition

$$\forall a > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \ln(a^n) = n \ln(a)$$

$$\forall a > 0, \quad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$$

Démonstration

- Si $n = 0$ $a^n = 1$ et $\ln(1) = 0 = 0 \times \ln(a)$
- Si $n > 0$ $a^n = a \times a \times a \times \dots \times a$ (n fois)
donc $\ln(a^n) = \ln(a) + \ln(a) + \dots + \ln(a)$ (n fois) et $\ln(a^n) = n \ln(a)$

- Si $n < 0$ alors $p = -n > 0$

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^p} = \left(\frac{1}{a}\right)^p$$

$$\ln(a^n) = \ln\left(\frac{1}{a}\right)^p = p \ln\left(\frac{1}{a}\right) = p(-\ln(a)) = -p \ln(a) = n \ln(a)$$
- $(\sqrt{a})^2 = a$ donc $\ln((\sqrt{a})^2) = \ln(a) = 2 \ln(\sqrt{a})$ et $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$.

Exercice 1 :

Ecrire les nombres suivants à l'aide d'un seul logarithme :

$$A = 2 \ln(3) + \ln(2) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad B = \frac{1}{2} \ln(9) - 2 \ln(3)$$

$$C = \frac{1}{2} \ln(25) - 2 \ln(2) - \ln\left(\frac{1}{3}\right) \quad D = \ln(100) + 3 \ln\left(\frac{1}{10}\right)$$

1.3 Fonction $\ln(u(x))$

On est souvent amené à considérer des expressions de la forme $\ln(u(x))$ où $u(x)$ est une expression en x .

Comme la fonction $\ln$ est définie sur $]0, +\infty[$, $\ln(u(x))$ existe si et seulement si $u(x) > 0$.

Soit alors u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$ $u(x) > 0$.

On étudie la fonction composée $\ln \circ u$ notée $\ln u$

Proposition

Soit u une fonction définie et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si u est continue sur I alors $\ln u$ est continue sur I .
- Si u est dérivable sur I alors $\ln u$ est dérivable sur I avec

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa fonction dérivée.

Exercice 3 :

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

$$a) f(x) = \ln(-3x + 2) \quad b) g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2 \ln(2x + 1) \quad c) h(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

On déduit du signe de la fonction $\ln$ la propriété suivante :

Proposition

Soit u une fonction strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

$$\ln(u(x)) = 0 \Leftrightarrow u(x) = 1$$

$$\ln(u(x)) > 0 \Leftrightarrow u(x) > 1$$

$$\ln(u(x)) < 0 \Leftrightarrow 0 < u(x) < 1$$

Exercice 4 :

1. Résoudre l'équation $\ln(2 - 4x) = 0$
2. Résoudre l'inéquation $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$
3. Etudier le signe de la fonction f définie sur $] -\frac{2}{3}; +\infty[$ par $f(x) = \ln(3x + 2)$.

On déduit de la stricte croissance de la fonction $\ln$ la propriété suivante :

Proposition

Soient u et v deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

$$\ln(u(x)) = \ln(v(x)) \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) > 0 \text{ et } v(x) > 0 \\ u(x) = v(x) \end{cases}$$

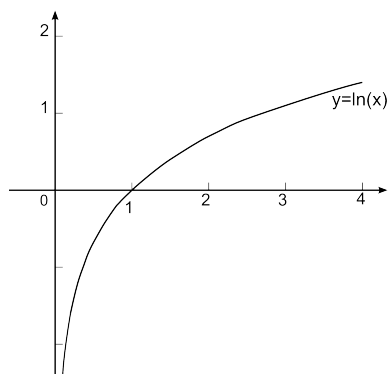
$$\ln(u(x)) < \ln(v(x)) \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) > 0 \text{ et } v(x) > 0 \\ u(x) < v(x) \end{cases}$$

Exercice 5 :

1. Résoudre l'équation $\ln(x^2 - 4) = \ln(3x)$
2. Résoudre l'inéquation $\ln(2x + 4) \geq \ln(6 - 2x)$

1.4 Limites

1.4.1 Limites en 0 et en $+\infty$



Proposition

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$$

On en déduit le tableau complet des variations de la fonction $\ln$

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

Démonstration

La limite en $+\infty$ est admise.

Pour tout $x > 0$ $\ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$$

Remarque

L'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction $\ln$.

La limite des fonctions composées donne :

Proposition

a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow a} u(x) = +\infty \quad \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow a} \ln(u(x)) = +\infty$$

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0 \quad \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow a} \ln(u(x)) = -\infty$$

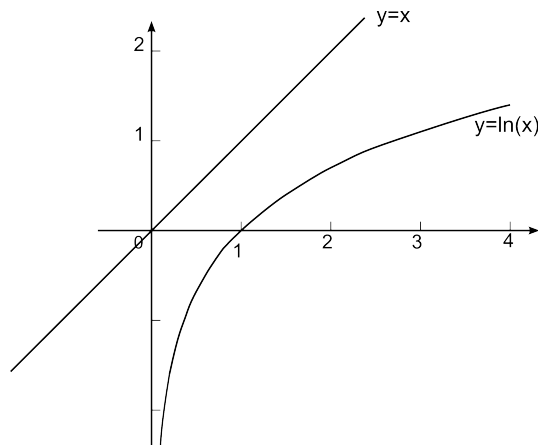
Exercice 6 :

Calculer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 4) \quad b) \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x - 1)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right) \quad d) \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$$

1.4.2 Comparaison des fonctions puissances et logarithme au voisinage de $+\infty$ et de 0



Proposition : Croissances comparées

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$$

Remarque

On dit que la puissance l'emporte sur le logarithme.

Démonstration

- La limite en $+\infty$ de $\frac{\ln(x)}{x}$ est admise.

- $x \ln(x) = x \left(-\ln\left(\frac{1}{x}\right) \right) = -\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0 \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$$

Plus généralement on a :

Proposition : Croissances comparées

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln(x)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln(x) = 0$$

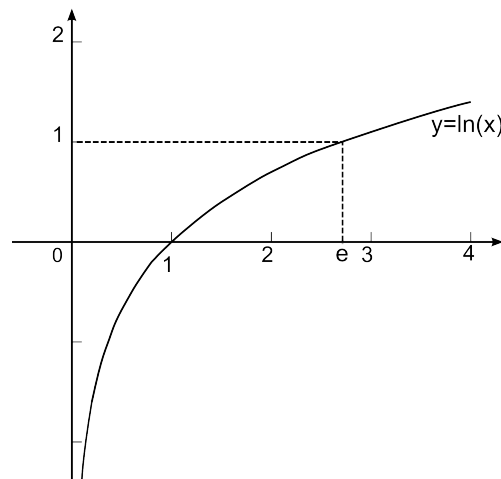
Exercice 7 :

Calculer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^3} \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^4)}{x^2} \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln(x)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \ln(x^5) \quad e) \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(x) \quad f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

1.5 Nombre e et équation $\ln(x) = m$, ($m \in \mathbb{Z}$)



La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$1 \in \ln(]0; +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)[=]-\infty; +\infty[$, donc l'équation $\ln(x) = 1$ admet une unique solution dans $]0; +\infty[$.

Cette valeur est notée e .

Définition

Le nombre e est l'unique nombre vérifiant

$$\ln(e) = 1$$

- A l'aide de la calculatrice on obtient

$$\ln(2.7) \approx 0.99 < 1 < \ln(2.8) \approx 1.03$$

$$\text{donc } 2.7 < e < 2.8$$

On a $e \approx 2.71828$. La courbe représentative de la fonction $\ln$ passe par le point $B(e; 1)$.

- **Python** connaît via **numpy** la constante réelle e qui est notée **np.e**

- Soit $m \in \mathbb{Z}$.

La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$m \in \ln(]0; +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)[=]-\infty; +\infty[$, donc l'équation $\ln(x) = m$ admet une unique solution dans $]0; +\infty[$.

Or $m = m \times 1 = m \ln(e) = \ln(e^m)$

Proposition

1.

$$\forall m \in \mathbb{Z} \quad \ln(e^m) = m$$

donc

$$\ln(x) = m \Leftrightarrow x = e^m$$

2. Soit u une fonction strictement positive sur un intervalle I

$$\forall m \in \mathbb{Z} \quad \ln(u(x)) = m \Leftrightarrow u(x) = e^m$$

Exercice 8 :

1. Résoudre les équations :

$$a) \ln(x) = 2 \quad b) \ln(x) = -3 \quad c) \ln(2x - 1) = 5$$

2. Résoudre l'inéquation :

$$\ln(x + 1) > 1$$

Exercice 9 :

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

1. Calculer f' et en déduire les variations de f .
2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses 1 et e .

2 Fonction exponentielle

2.1 Définition, étude de la fonction exponentielle

2.1.1 Définition

La fonction logarithme est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

La fonction $\ln$ réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

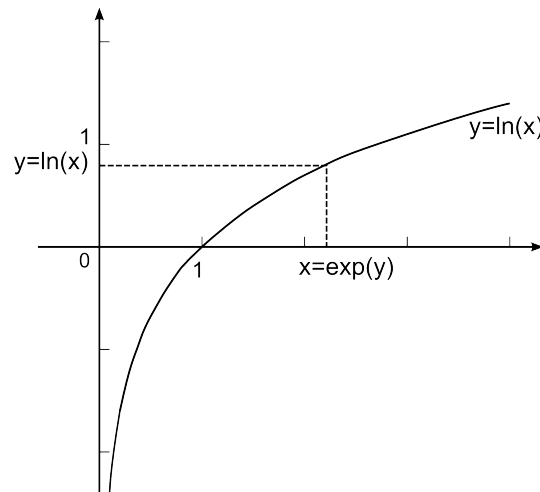
Pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $\ln(x) = y$ admet donc une unique solution dans $]0; +\infty[$.

Si on note $f(x) = \ln(x)$, on note f^{-1} l'application de $\mathbb{R}$ dans $]0; +\infty[$ qui à tout $y \in \mathbb{R}$ associe LA solution de l'équation $\ln(x) = y$.

$$f : \left(\begin{array}{ccc}]0; +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array} \right)$$

$$f^{-1} : \left(\begin{array}{ccc}]0; +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & x \text{ tel que } \ln(x) = y \end{array} \right)$$

f^{-1} est appelée bijection réciproque de f .



Définition

La fonction exponentielle est la bijection réciproque, définie sur $\mathbb{R}$, de la fonction logarithme népérien. On la note $\exp$.

En d'autres termes, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x)$ est l'unique réel strictement positif dont le logarithme népérien vaut x .

Remarques

- $\ln : x \longrightarrow y$
 $x \longleftarrow y : \exp$
soit $\begin{cases} y = \ln(x) \\ x > 0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x = \exp(y) \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$
- $\ln(1) = 0$ donc $\exp(0) = 1$
 $\ln(e) = 1$ donc $\exp(1) = e$
- plus généralement pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $\ln(e^m) = m$ donc $\exp(m) = e^m$

Notation

Pour tout réel x on pose $\exp(x) = e^x$

Remarques

- On lit donc e^x : "exponentielle x "
- Sur la calculatrice, la fonction exponentielle correspond à la touche `exp` ou `ex`. On obtient les valeurs approchées suivantes :

$$e^2 \approx 7.39 \quad e^{-2} \approx 0.14 \quad e^3 \approx 20.09 \quad e^{10} \approx 22026.5 \quad e^{-5} \approx 0.0067 \quad e^{\ln(4)} = 4 \quad e^0 = 1$$

- La fonction exponentielle est disponible en **Python** dans la librairie **numpy** avec la commande suivante :

```
import numpy as np  
np.exp(x)
```

Propriété

1. La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$.
2. $e^0 = 1$ et $e^1 = e$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$
5. Pour tout $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$
6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $y > 0$

$$e^x = y \Leftrightarrow x = \ln(y)$$

Exemples :

1. $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln(3)$
2. $e^x = -1$ n'a pas de solution car pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$
3. $\ln(x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{3}}$
4. $e^{\ln(2)} = 2 \quad \ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}$
5. $\ln(2x - 1) = 3 \Leftrightarrow 2x - 1 = e^3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(e^3 + 1)$

2.1.2 Sens de variation et dérivée

Propriété

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
D'où le tableau de variation de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x			

Démonstration

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

$$a = \ln(e^a) \text{ et } b = \ln(e^b)$$

On a donc $\ln(e^a) < \ln(e^b)$ soit $e^a < e^b$ car la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Conséquence

- Pour tous réels a et b $e^a = e^b$ équivaut à $a = b$
- Pour tous réels a et b $e^a > e^b$ équivaut à $a > b$
- Pour tout réel a ; $e^a > 1$ équivaut à $a > 0$ car $1 = e^0$

Propriété

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$\exp'(x) = \exp(x)$$

La dérivée de la fonction exponentielle est la fonction exponentielle elle même.

Exercice 10 :

Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

$$a) f(x) = 3x^2 - 5\ln(x) + e^x \quad b) g(x) = \frac{e^x}{x}$$

2.1.3 Courbe représentative

Le point d'abscisse 0

On sait que $\exp(0) = 1$ et $\exp'(x) = \exp(x)$ donc $\exp'(0) = 1$

La courbe représentative de la fonction $\exp$ passe par le point $A(0, 1)$.

La tangente à la courbe en A a pour équation

$$y = 1(x - 0) + 1 = x + 1$$

Approximation affine en 0

On déduit du résultat précédent

$$\text{pour } x \text{ proche de } 0, e^x \approx x + 1$$

Concavité

Si $f(x) = e^x$, f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = e^x \quad \text{et} \quad f''(x) = e^x > 0$$

donc la fonction $\exp$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

En particulier la courbe de la fonction $\exp$ est au dessus de ses tangentes et en dessous de ses cordes.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geq x + 1$$

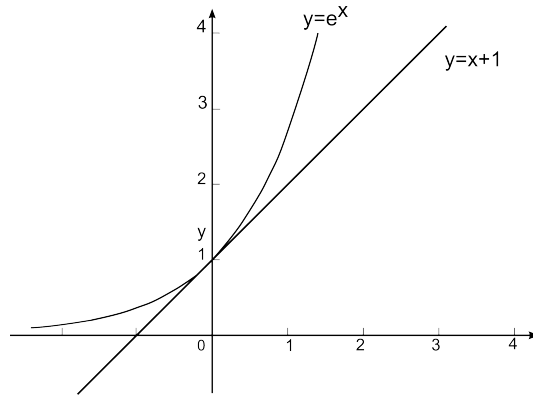
Tableau de valeurs

On a le tableau suivant :

x	-3	-1	-0.5	-0.05	0	0.25	0.5	1	1.5	2	2.5
e^x	0.05	0.4	0.6	0.8	1	1.3	1.6	2.7	4.5	7.4	12.2

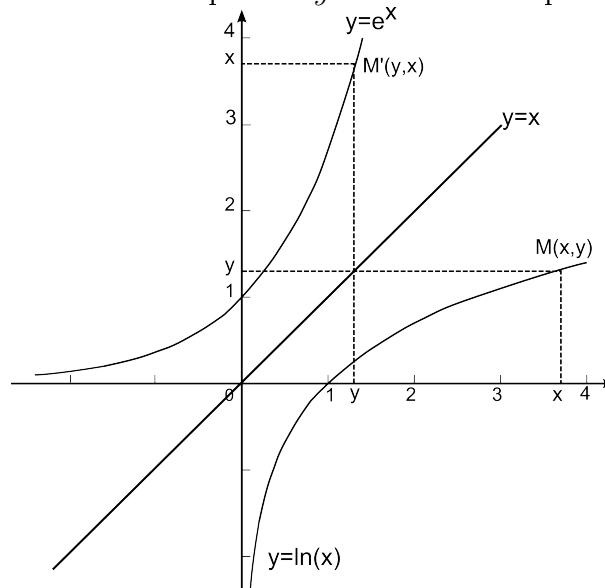
Courbe représentative

On en déduit la courbe représentative de la fonction exp :



Lien avec la courbe de la fonction ln

- On note $\mathcal{C}_{\ln}$ et $\mathcal{C}_{\exp}$ les courbes représentant respectivement les fonctions exponentielle et logarithme népérien, et Δ la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormal.



- Soit $x > 0$ et $M(x; y)$ un point de $\mathcal{C}_{\ln}$. On a alors

$$y = \ln(x)$$

Mais alors x est le nombre dont le logarithme népérien vaut y donc

$$x = e^y$$

et le point $M'(y; x)$ appartient à $\mathcal{C}_{\exp}$.

Les points $M(x; y)$ et $M'(y; x)$ sont symétriques par rapport à Δ .

- La courbe $\mathcal{C}_{\exp}$ est la symétrique de la courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ par rapport à Δ .

2.2 Propriétés algébriques

Les propriétés suivantes se déduisent de celles de la fonction $\ln$.

2.2.1 Exponentielle d'une somme

Propriété

1. Pour tous rels a et b $e^{a+b} = e^a \times e^b$

2. Pour tout entier $n \geq 2$ et pour tous réels $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$e^{a_1+a_2+\dots+a_n} = e^{a_1} \times e^{a_2} \times \dots \times e^{a_n}$$

3. Pour tout réel a et pour tout entier naturel p

$$e^{pa} = (e^a)^p$$

Démonstration

1.

$$\ln(e^{a+b}) = a + b$$

$$\ln(e^a \times e^b) = \ln e^a + \ln e^b = a + b = \ln(e^{a+b})$$

donc $e^{a+b} = e^a \times e^b$.

2. et 3. se déduisent de 1.

Remarque

On sait déjà, d'après les règles sur les puissances entières, que pour tous les entiers relatifs m et n $e^{m+n} = e^m \times e^n$.

Cette propriété se généralise donc à tous les exposants réels, ce qui montrer la pertinence de la notation e^x .

Exemples :

1. $e^{2x+3} = e^{2x} \times e^3 = (e^x)^2 \times e^3$

2. $ee^{x^2} = e^{x^2+1}$

3. $2e^x = e^{\ln(2)}e^x = e^{x+\ln(2)}$

4. $e^{x^2+3x+2} = e^{x^2} \times (e^x)^3 \times e^2$

Exercice 11 :

Vérifier que pour tout réel x

$$(e^x - 1)(e^x + 1) = e^{2x} - 1$$

Application

Résolution des équations du type $ae^{2x} + be^x + c = 0$

On effectue le changement de variable $X = e^x$

On a alors $ae^{2x} + be^x + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ aX^2 + bX + c = 0 \end{cases}$

On trouve alors les solutions en X puis les solutions en x en résolvant $e^x = X$ (équivalent à $x = \ln(X)$ si $X > 0$).

Exercice 12 :

Résoudre l'équation

$$-2e^{2x} + 5e^x + 3 = 0$$

2.2.2 Quotient et inverse d'exponentielles

Propriété

1. Pour tout réel a , $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
2. Pour tous réels a et b , $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
3. Pour tout réel a et pour tout entier relatif p :

$$e^{pa} = (e^a)^p$$

Démonstration

1. $e^a \times e^{-a} = e^{a-a} = e^0 = 1$ donc $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
2. $e^{a-b} = e^a \times e^{-b} = e^a \times \frac{1}{e^b} = \frac{e^a}{e^b}$

Exemples :

1. $e^{x-2} = \frac{e^x}{e^2}$
2. $\frac{e^x}{3} = \frac{e^x}{e^{\ln 3}} = e^{x-\ln 3}$
3. $\frac{e^x}{e^{2x+1}} = e^{x-(2x+1)} = e^{-x-1} = \frac{1}{e^{x+1}}$.

2.3 Fonction $e^{u(x)}$

On est souvent amené à considérer des expressions de la forme $e^{u(x)}$ où $u(x)$ est une expression en x . Comme la fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$, $e^{u(x)}$ existe si et seulement si $u(x)$ existe.

Soit alors u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On étudie la fonction composée $\exp \circ u$ notée e^u

Proposition

Soit u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si u est continue sur I alors e^u est continue sur I .
- Si u est dérivable sur I alors e^u est dérivable sur I avec

$$(e^u)' = u'e^u$$

Exercice 13 :

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

$$a) f(x) = e^{2x+3} \quad b) g(x) = x^2 + 3 + xe^{x+1} \quad c) h(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}$$

Remarques

Equation $e^{u(x)} = k$, inéquations $e^{u(x)} > k$ et $e^{u(x)} < k$

si $k < 0$, l'équation $e^{u(x)} = k$ n'a pas de solution

si $k > 0$, $e^{u(x)} = k \Leftrightarrow u(x) = \ln(k)$

si $k > 0$, $e^{u(x)} > k \Leftrightarrow u(x) > \ln(k)$ car la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$
résultats analogues pour $e^{u(x)} < k$.

Exercice 14 :

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$a) e^{x+1} = 7 \quad b) 3e^{x+1} + 5 = 2 \quad c) e^{2x-6} < 2 \quad d) 2e^{4-3x} - 5 > 1$$

$$e) e^x e^{x^2} = 1 \quad f) e^{2x} e^{3x-1} \leq 3$$

On déduit de la stricte croissance de la fonction exponentielle la propriété suivante :

Proposition

Soient u et v deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

$$e^{u(x)} = e^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) = v(x)$$

$$e^{u(x)} < e^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) < v(x)$$

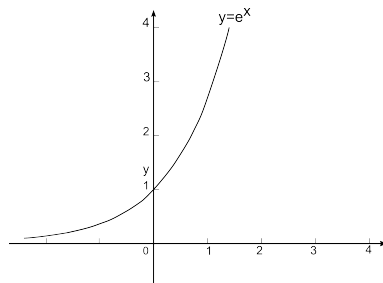
Exercice 15 :

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$a) e^{2x+3} = e^{x-1} \quad b) 2e^{2x+1} = 3e^{x-2} \quad c) e^{-x} - e^x > 0 \quad d) e^{x^2} \leq e^{3x-2}$$

2.4 Limites

2.4.1 Limites en $-\infty$ et en $+\infty$



Proposition

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

On en déduit le tableau complet des variations de la fonction exponentielle

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x	0	1	$+\infty$

Remarque

L'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction exponentielle au voisinage de $-\infty$.

La limite des fonctions composées donne :

Proposition

a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow a} u(x) = +\infty \quad \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow a} e^{u(x)} = +\infty$$

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow a} u(x) = -\infty \quad \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow a} e^{u(x)} = 0$$

Exercice 16 :

Calculer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x+1} \quad b) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{e^x + 1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+1} \quad d) \lim_{x \rightarrow 2^+} e^{\sqrt{x^2+1}}$$

Un cas particulier important : la fonction $x \mapsto e^{-x}$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-x}$.

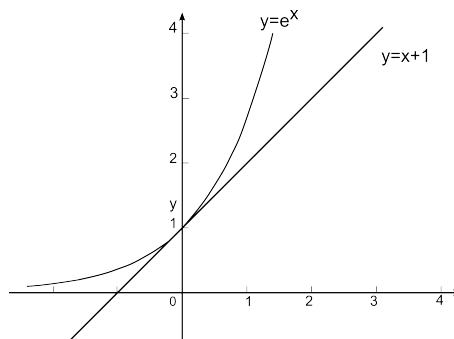
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-x} > 0$
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -e^{-x}$
- f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$
- La courbe représentative de la fonction f est la symétrique de la courbe représentative de la fonction exponentielle par rapport à l'axe des ordonnées.

2.4.2 Limite en 0 de $\frac{e^x - 1}{x}$

Propriété

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration



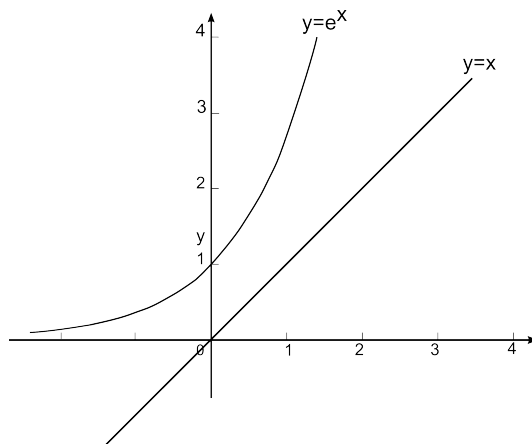
Soit $f(x) = e^x$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = e^x$ donc $f'(0) = 1$.

Par définition du nombre dérivé en 0, $f'(0)$ est égal à la limite du taux d'accroissement de f en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = f'(0) = 1$$

2.4.3 Comparaison des fonctions puissances et exponentielle au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$



Proposition : Croissances comparées

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

Remarque

On dit que l'exponentielle l'emporte sur la puissance.

Plus généralement on a :

Proposition : Croissances comparées

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

Exercice 17 :

Calculer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1-x} \quad e) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x+1)e^x \quad f) \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}$$

3 Fonctions puissances

3.1 Puissance d'un réel strictement positif

Soit x un réel strictement positif et n un entier relatif.

On a

$$\ln(x^n) = n \ln(x)$$

d'où

$$e^{\ln(x^n)} = e^{n \ln(x)}$$

soit

$$x^n = e^{n \ln(x)}$$

On peut étendre cette propriété à des puissances non entières :

Définition

Pour tout $a > 0$ et pour tout réel b on pose

$$a^b = e^{b \ln(a)} \quad (a^b \text{ se lit "a puissance b"})$$

Remarque

La définition de a^b oblige que $a > 0$ à cause de $\ln(a)$. Les règles de calculs algébriques donnent :

Proposition

Soient a, b, c, d des réels avec $a > 0$ et $b > 0$.

- $a^{c+d} = a^c \times a^d$
- $a^{-c} = \frac{1}{a^c}$
- $(a^c)^d = a^{c \times d}$
- $(ab)^c = a^c \times b^c$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}$
- $\ln(a^c) = c \ln(a)$

3.2 Fonctions racines n -ième

- Soit $f(x) = x^2$ définie sur $[0; +\infty[$

f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [0; +\infty[$.

Sa bijection réciproque est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

En effet

$$f(x) = x^2 = y \Leftrightarrow x = \sqrt{y} = f^{-1}(y)$$

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ x & \longrightarrow & y = x^2 \\ x = \sqrt{y} & \longleftarrow & y \\ & f^{-1} & \end{array}$$

• Plus généralement, la fonction $g(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Elle réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[0; +\infty[$.

Pour tout réel positif ou nul y l'équation $x^n = y$ admet un unique solution dans $[0; +\infty[$.

Or

$$\begin{aligned} x^n = y &\Leftrightarrow n \ln(x) = \ln(y) \\ &\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{1}{n} \ln(y) \\ &\Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{n} \ln(y)} \end{aligned}$$

$x^n = y$ admet pour unique solution $x = e^{\frac{1}{n} \ln(y)} = y^{\frac{1}{n}}$

avec la définition de la puissance d'un réel strictement positif.

On a donc

$$g^{-1} \left(\begin{array}{ccc} [0; +\infty[& \longrightarrow & [0; +\infty[\\ y & \longmapsto & y^{\frac{1}{n}} \end{array} \right)$$

On a pour tous réels x et y positifs

$$x^n = y \Leftrightarrow x = y^{\frac{1}{n}}$$

D'où la définition suivante :

Proposition et définition

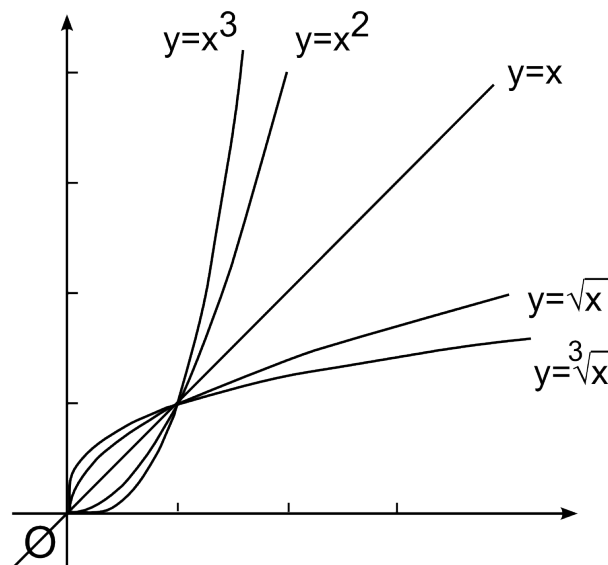
- Si a est un réel positif et $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $x^n = a$ admet une unique solution dans $[0; +\infty[$. Cette solution est appelée racine n -ième de a . On la note $\sqrt[n]{a}$.
- Si $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle fonction racine n -ième la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt[n]{x}$.

Remarques :

- On a alors l'équivalence :

$$\forall x > 0 \text{ et } \forall y > 0, \quad x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$$

- Les fonctions $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ étant des bijections réciproques l'une de l'autre, leur courbes représentatives dans un repère orthogonal sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Généralisation aux exposants fractionnaires :

Définition

Si $x > 0$; $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$x^{-\frac{1}{q}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{q}}} \quad ; \quad x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p$$

Exemple

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8 \quad \text{ou} \quad 4^{\frac{3}{2}} = \left(4^3\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8$$

Exercice 18 :

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

1. $\sqrt[3]{8}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$; $8^{\frac{2}{3}}$
2. $(\sqrt[n]{a})^n$; $\sqrt[3]{a^5} \times \sqrt[4]{a^7}$

3.3 Dérivée de $x \mapsto x^\alpha$ (α réel)

Proposition

La fonction $x \mapsto x^\alpha$ (α réel fixé) est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$.

Sa dérivée est :

$$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$$

Démonstration

Puisque $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ f est dérivable sur $]0; +\infty[$ avec :

$$f'(x) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln(x)} = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

Exercice 19 :

1. Montrer que la fonction racine n -ième est dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. Sur $]0; +\infty[$ déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2 \sqrt{x} \quad ; \quad g(x) = \sqrt[4]{x^3}$$

Proposition

Soit u une application dérivable strictement positive sur un intervalle I .

Pour tout α réel, u^α est dérivable sur I et :

$$(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$$

Exercice 20 :

Déterminer la dérivée de :

$$f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}$$

Fonctions logarithme et exponentielle : exercices

1) Exprimer en fonction de $\ln(2)$ les réels suivants.

1. $\ln(8)$, $\ln\left(\frac{1}{4}\right)$, $\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $4\ln(\sqrt{2}) - \frac{\ln(4)}{4}$
 2. $\ln(2e^3)$, $\ln\left(\frac{e}{2}\right)$, $2\ln(4) - \ln(4e^2)$.
-

2) Résoudre les équations

1. $x \ln(x) = 0$
 2. $\ln(2x + 1) = 4$
 3. $\ln(x + 7) = \ln(3 - x)$
-

3) Résoudre les inégalités suivantes

1. $\ln(x) > 2$
 2. $1 - \ln(x) \geq 0$
 3. $\ln(x^2 + x + 1) < 0$
 4. $\ln(2x + 1) > 1$
 5. $\ln(x - 4) < \ln(4x + 3)$
-

4) Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \ln(2x - 1)$
 2. $f(x) = \ln\left(\frac{x + 2}{x + 1}\right)$
 3. $f(x) = \frac{1}{1 - \ln(x)}$
-

5) Déterminer la dérivée des fonctions suivantes

$$f_1(x) = x \ln(x) \quad f_2(x) = \ln(2x - 1) \quad f_3(x) = \frac{x}{\ln(x)}$$
$$f_4(x) = \frac{\ln(1 + x^2)}{x} \quad f_5(x) = (x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) \quad f_6(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1})$$

6) Déterminer la limite de f en α

1. $f(x) = 2\ln(x - 3) + x$, $\alpha = +\infty$ et $\alpha = 3$
2. $f(x) = \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, $\alpha = +\infty$
3. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, $\alpha = 0$ et $\alpha = +\infty$
4. $f(x) = \frac{x + 1}{\ln(x)}$, $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ et $\alpha = +\infty$

7) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x) - 2x + 3$$

On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

1. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Que pouvez-vous en déduire sur la courbe $\mathcal{C}$?
(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x > 0$. Dresser le tableau des variations de f . On fera figurer les limites aux bornes. On déterminera aussi l'expression de $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et on en donnera une valeur approchée. On donne $\ln(2) \approx 0.7$.
3. Etablir que f est concave sur $]0, +\infty[$.
4. (a) Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
(b) Justifier sans calcul que $\mathcal{T}$ est située au dessus de $\mathcal{C}$ sur $]0, +\infty[$
5. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β dans $]0, +\infty[$ avec $\alpha < \beta$.
(b) Justifier que $\beta \in]1, 2[$.
6. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$. On donne $\alpha \approx 0.06$ et $\beta \approx 1.76$

8) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x - \ln(x)$

1. (a) Montrer que la dérivée de g vérifie pour tout réel $x > 0$ l'égalité : $g'(x) = \frac{x-1}{x}$
(b) Calculer $g(1)$.
(c) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.
(d) Dresser le tableau des variations de g sur $]0; +\infty[$ en y faisant figurer les résultats obtenus aux questions 1.b) et 1.c).
(e) Justifier que pour tout réel $x > 0$ on a : $g(x) > 0$.
2. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x - \ln(x)}.$$

- (a) Montrer que pour tout réel $x > 0$ on a : $f'(x) = \frac{1-x}{x(x - \ln(x))^2}$
- (b) Déduire de 1.c) les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 et $+\infty$.
Donner une interprétation graphique de la limite de f en $+\infty$.
- (c) Dresser le tableau des variations de f sur $]0; +\infty[$. On y fera figurer les limites obtenues à la question 2.b) ainsi que $f(1)$.
3. On cherche à résoudre l'équation $f(x) = x$ dans $]0; +\infty[$.
(a) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation :

$$x - \ln(x) - \frac{1}{x} = 0$$

On pose donc pour tout réel $x > 0$: $h(x) = x - \ln(x) - \frac{1}{x}$.

(b) Montrer que la dérivée de h vérifie pour tout réel $x > 0$ l'égalité : $h'(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2}$.

En déduire le sens de variation de h sur $]0; +\infty[$.

(c) On donne : $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$. Dresser le tableau des variations de h .

(d) Déduire des questions précédentes que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$.

Calculer $f(1)$. En déduire la valeur de α .

4. Tracer l'allure de la représentation graphique de f ainsi que la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 4cm.

9) On considère la fonction f déterminée sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$$

Etude d'une fonction g auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad g(x) = x^3 - x + 3 - 2 \ln x$$

1. Soit P la fonction polynôme déterminée $P(x) = 3x^3 - x - 2$.

(a) Prouver que P est factorisable par $x - 1$.

(b) Ecrire $P(x)$ sous la forme d'un produit de $x - 1$ par un polynôme $Q(x)$ que l'on déterminera.

(c) Déterminer alors le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. Vérifier que la fonction dérivée g' peut s'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad g'(x) = \frac{P(x)}{x}$$

3. En déduire les variations de g sur son domaine d'étude.

4. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad g(x) > 0$$

Etude de la fonction f .

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Que peut-on en déduire pour la représentation graphique de f , notée $\mathcal{C}_f$?

2. (a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

(b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

(c) Montrer que sur $[1, +\infty[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite (Δ) .

3. On donne le tableau de valeurs suivant :

x	0,5	3
$f(x)$	-3,3	4,3

(a) Vérifier que la fonction dérivée f' peut s'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

(b) En déduire les variations de f .

(c) Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$ et tracer la droite (Δ) dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'unité choisie étant le cm.

10)

On rappelle que $e = e^1 \simeq 2,7$.

On considère la fonction f définie sur $D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$ par :

$$\forall x \in D, \quad f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{\ln(u_n)}.$$

1. Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.
2. Pour $x \in D$, Calculer $f'(x)$ puis justifier que $f'(x)$ est du même signe que $\ln(x) - 1$.
3. (a) Dresser le tableau de variations de f sur D en le complétant par les limites de f aux bornes de D .
(b) Montrer que f réalise une bijection de $[e, +\infty[$ sur $[e, +\infty[$.
4. (a) Résoudre l'équation $f(x) = x$ d'inconnue x , pour $x \in D$.
(b) Donner le signe de $f(x) - x$ lorsque $x \in D$.
5. (a) Prouver par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq e.$$

(b) Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

(c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$.

6. Compléter le script Python suivant afin qu'il affiche le plus petit entier n tel que $|u_n - e| \leq 10^{-10}$ l'utilisateur.

```
1. import numpy as np
2. n=0
3. u=3
4. while .... :
5.     u=....
6.     n=....
7. print(n)
```

Quelle valeur obtenez-vous après exécution du programme précédent ?

11)

Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2x - 1 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Calculer la limite de g en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
(b) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$. En déduire la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de g sur $]0; +\infty[$ et dresser son tableau de variation.
3. (a) Démontrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique (D) dont on précisera une équation.
(b) Étudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (D) .
4. (a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
(b) Vérifier que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$
(c) Recopier et compléter l'algorithme de dichotomie ci-dessous écrit à l'aide de **Python** afin qu'il affiche un encadrement de α à 10^{-2} près .

```
1. import numpy as np
2. def g(x) :
3.     return ....
4. a=....
5. b=....
6. while b-a .... :
7.     m=....
8.     if g(a)*g(m)<=0 :
9.         .....
10.    else :
11.        ....
12. print(....)
```

5. Le programme **Python** ci-dessus affiche 0.88 comme résultat.
Dans un repère orthonormé, placer le réel α sur l'axe des abscisses, tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (D) .

12) On pose, pour tout réel x de l'intervalle $] -1, +\infty[$:

$$f(x) = x \ln(1+x).$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $] -1, +\infty[$, et que sa dérivée f' est également dérivable sur l'intervalle $] -1, +\infty[$. On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère du plan.

1. (a) Déterminer la limite de f en -1 .
Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
(b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. (a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $] -1, +\infty[$.

- (b) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $] -1, +\infty[$: $f''(x) = \frac{x+2}{(1+x)^2}$.
- (c) En déduire les variations de la fonction f' sur l'intervalle $] -1, +\infty[$.
3. (a) Calculer $f'(0)$. En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout $x > -1$.
- (b) Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $] -1, +\infty[$.
4. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans un repère du plan, en soignant le tracé au point d'abscisse 0 .

13) Dans tous les calculs et expressions, la lettre "e" désigne l'exponentielle de 1. On donne $e \approx 2.7$

1. (a) Montrer que pour tout réel x , $x^2 - x.e + e > 0$.

- (b) On note pour tout réel x ,

$$P(x) = 2x^2 - (2e).x + e^2 - 2e$$

Calculer les racines de P , notées α et β , et en déduire le signe de $P(x)$ en fonction des différentes valeurs de x .

On considère alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 - \ln(x^2 - x.e + e)$$

On admettra sans le justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

2. (a) Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(e-1)$ et $f(e)$.

Vérifier que $f\left(\frac{e}{2}\right) = -\ln\left(1 - \frac{e}{4}\right)$.

Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- (b) Calculer $f'(x)$, puis étudier son signe. Vérifier que $f'(0) = 1$ et $f'(e) = -1$.

- (c) En utilisant $e \approx 2,7$, ordonner les nombres 0 , 1 , $e-1$, e , $\frac{e}{2}$ puis dresser le tableau des variations de f en faisant figurer les valeurs étudiées en 2.(a).

3. Vérifier que :

$$f''(x) = \frac{P(x)}{(x^2 - x.e + e)^2}$$

et en déduire grâce au 1.(b) les points d'inflexions de $\mathcal{C}_f$.

4. Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé d'unité 5cm, en faisant figurer les résultats obtenus aux questions précédentes.

On donne $f\left(\frac{e}{2}\right) \approx 1,1$; $\alpha \approx 0,4$; $\beta \approx 2,3$

14) Résoudre les équations suivantes :

(a) $e^x = 1$, (b) $e^x = 4$, (c) $e^{2x} = 2$, (d) $4e^{-x} - 3 = 12$, (e) $e^{2x-1} = 2$, (f) $e^{-x} = -5$?

15) Simplifier les expressions suivantes pour $x > 0$:

(a) $(e^x)^5(e^{-2x})^2$ (b) $e^{-3x+1}(e^x)^3$ (c) $(e^x - e^{-x})^2 - e^{-x}(e^{3x} + e^{-x})$

16) Résoudre les équations suivantes :

1. $e^x - e^{-x} = 0$

2. $2e^{2x-1} = 3e^x$

3. $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$ (Poser $X = e^x$)

17) Résoudre les inéquations suivantes :

1. $e^{-x} - e^x \geq 0$

2. $e^{2x-3} > 5$

3. $2e^{2x} - 4 \leq 0$

4. $e^{x^2-5x} \geq 1$

18) Calculer la dérivée des fonctions suivantes

1. $f(x) = e^{x^2+5x}$

2. $f(x) = x^2e^{-x}$

3. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

4. $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

5. $f(x) = \ln(e^x - 3)$

19) Déterminer la limite de f en α

1. $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$, $\alpha = 0$, $\alpha = -\infty$, $\alpha = +\infty$

2. $f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 4}$, $\alpha = +\infty$, $\alpha = -\infty$

3. $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$, $\alpha = +\infty$

4. $f(x) = e^x - x + 1$, $\alpha = -\infty$, $\alpha = +\infty$.

5. $f(x) = e^{2x} - 5e^x + 1$, $\alpha = -\infty$, $\alpha = +\infty$.

6. $f(x) = (x^2 + 1)e^x$, $\alpha = -\infty$, $\alpha = +\infty$.

7. $f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 2}$, $\alpha = -\infty$, $\alpha = +\infty$.

20) on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.

Soit $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Que pouvez-vous en déduire sur la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f ?
 2. (a) Montrer que pour tout réel x on a : $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$.
(b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Comment interpréter graphiquement ce résultat ?
 3. (a) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x , la relation : $f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$.
(b) déterminer le sens de variation de f . Dresser son tableau de variation en y faisant figurer les limites calculées aux questions 1 et 2 ainsi que $f(0)$.
(c) Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
 4. On admet que pour tout réel x on a : $f''(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$. Étudier la convexité de f .
 5. Tracer $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$.
-

21) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{4}{1+e^x}.$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. (a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
La courbe représentative de f admet-elle une asymptote en $-\infty$? Si oui, donner son équation.
(b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
La courbe représentative de f admet-elle une asymptote en $+\infty$? Si oui, donner son équation.
2. (a) Calculer la dérivée de f et déterminer le signe de f' .
(b) Dresser le tableau de variation de f en faisant apparaître les limites et la valeur de $f(0)$.
(c) Quelle est la position de la courbe représentative de f par rapport à la droite d'équation $y = 4$?
(d) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 0$.
3. (a) Montrer que la dérivée seconde de f est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = \frac{4e^x(e^x - 1)}{(1+e^x)^3}.$$

- (b) En déduire que f possède un unique point d'inflexion et préciser un intervalle sur lequel f est convexe et un intervalle sur lequel f est concave.
- (c) Déterminer alors la position relative de la courbe représentative de f avec sa tangente au point d'abscisse $x = 0$.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f , les asymptotes et la tangente au point d'abscisse 0.
5. Soit g la fonction définie sur $]0, 4[$ par $g(y) = \ln\left(\frac{4}{y} - 1\right)$ pour tout réel y de $]0, 4[$.

- (a) Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, 4[$.
- (b) Pour tout $y \in]0, 4[$, calculer $f(g(y))$.
- (c) Que représente la fonction g pour la fonction f ?

22) Soit f la fonction définie pour tout x réel par : $f(x) = (x^2 - x - \frac{3}{4})e^{2x}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère du plan.

1.
 - (a) Déterminer la limite de f en $-\infty$. En déduire une asymptote de $\mathcal{C}$.
 - (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. (a) Déterminer la fonction dérivée f' de f sur $\mathbb{R}$. Montrer que f' change de signe en $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ et en $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
 - (b) Donner le tableau des variations de f .
3. (a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 0$.
 - (b) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel x .
 - (c) Déterminer une équation des tangentes à C aux points d'abscisses $-\frac{1}{2}, 0$ et $\frac{3}{2}$.
4.
 - (a) Tracer les tangentes à C aux points d'abscisses $-\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2}, 0$ et $\frac{\sqrt{5}}{2}$ dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.
 - (b) Tracer C et ses asymptotes éventuelles dans ce même repère.
On prendra : $\frac{\sqrt{5}}{2} \simeq 1,1$; $f(-\frac{\sqrt{5}}{2}) \simeq 0,2$; $f(\frac{\sqrt{5}}{2}) \simeq -5,8$; $2e^{-1} \simeq 0,7$; $2e^3 \simeq 40$.

23) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = e^x - \ln(x)$$

et la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$g(x) = xe^x - 1$$

1. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
 - (b) Calculer la dérivée g' de g sur $[0, +\infty[$.
En déduire le tableau des variations de g . On y fera figurer la valeur en 0 et la limite en $+\infty$.
 - (c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0, +\infty[$.
Vérifier que $\alpha \in]0, 1[$.
 - (d) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .
2. (a) Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures et la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

- (b) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x}$$

En déduire le tableau des variations de f sur $]0, +\infty[$.

- (c) Justifier que le réel α vérifie $\frac{1}{\alpha} = e^\alpha$. En déduire que $f(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha}$.

3. (a) Montrer que la dérivée seconde de f vérifie :

$$f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2}$$

- (b) En déduire la convexité de f sur $]0, +\infty[$.

4. Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.
On donne $\alpha \approx 0,57$ et $f(\alpha) \approx 2,23$.

24) Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(1 + e^x)$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
On admet que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$.
En déduire la monotonie de f sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer la limite de f en $-\infty$.
 $\mathcal{C}_f$ admet-elle une asymptote ? Si oui, donner l'équation de cette asymptote.
4. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
(b) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + \ln(1 + e^{-x})$.
(c) En déduire que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
(d) Etudier le signe de $f(x) - x$ pour tout réel x , et en déduire la position relative de (D) par rapport à $\mathcal{C}_f$.
5. Déterminer l'équation de la tangente (T_0) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 .
6. (a) Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites aux bornes et la valeur en 0 .
(b) Tracer sur un même repère l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$, les droites (D) et (T_0) .
On admet qu'une valeur approchée de $\ln(2)$ est 0,69 .

25) Le but de cet exercice est l'étude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout réel } x, \quad f(x) = e^x - e^{-x}$$

et la résolution d'une équation. On note C_f la courbe représentative de f .

1. (a) Donner le domaine de définition de f et étudier la parité de f . Que peut-on en déduire pour la courbe C_f ?
(b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
2. (a) Calculer $f'(x)$ pour x réel.
(b) Construire le tableau de variation de f .
(c) Après avoir calculé $f(0)$, déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel x .
(d) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0.
On note cette droite T .
3. (a) Montrer que la courbe C_f admet un point d'inflexion que l'on précisera et étudier la convexité de f .
(b) Construire sur un même schéma C_f et T .
4. Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère dans cette question l'équation (E_n) d'inconnue x :

$$f(x) = n.$$

- (a) Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution notée u_n (on ne cherchera pas ici à calculer u_n). Préciser la valeur de u_0 .
- (b) Soit n un entier naturel non nul, calculer $f(\ln(n))$ et $f(\ln(2n))$.
En déduire que $\ln(n) \leq u_n \leq \ln(2n)$.
Quelle est la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?
- (c) Compléter la fonction Python suivante de manière à ce qu'elle renvoie une valeur approchée de la solution de l'équation (E_n) avec une précision inférieure ou égale à la valeur *prec*

```
1. import numpy as np
2. def Dico(n,prec) :
3.     a=np.log(n)
4.     b=np.log(2*n)
5.     while.... :
6.         u=(a+b)/2
7.         if .... :
8.             b=u
9.         else :
10.            a=....
11.     return ....
```

- (d) Soit n un entier naturel. Montrer que l'équation : $x^2 - nx - 1 = 0$ admet deux solutions réelles que l'on déterminera et dont on précisera les signes.
- (e) A l'aide du changement de variable $t = e^x$, déterminer la solution u_n de l'équation (E_n) pour n entier naturel.

26) Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(0) &= 0 \\ f(x) &= \frac{x^2}{e^x - 1} \quad \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

Soit (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité 2 cm).

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = (-x + 2)e^x - 2$ pour tout réel x positif ou nul.

1. Calculer la limite de g en $+\infty$.
2. Etudier les variations de la fonction g sur $[0, +\infty[$. (On précisera $g(0)$).
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle, notée α .
4. Etudier le signe de $g(x)$ sur $[0, +\infty[$ et montrer que $1 < \alpha < 2$. On donne $e \approx 2,7$.

Partie 2

1. Rappeler $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$.
2. En déduire que f est continue en 0.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$, et donner une interprétation graphique de cette limite.
4.
 - (a) Pour $x > 0$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
 - (b) En déduire le tableau de variations de f , en y faisant apparaître le réel α défini au **A,3**).
 - (c) Montrer que $f(\alpha) = \alpha(2 - \alpha)$, où α est le réel défini au **A,3**).
5. (a) Justifier que pour tout $x > 0$, $e^x \geq x + 1$
(b) En déduire le signe de $f(x) - x$ sur $]0, +\infty[$
6. Tracer la courbe (C) en plaçant la tangente au point d'abscisse α . On donne $\alpha \approx 1,6$.

Partie 3

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= f(u_n) \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. Compléter le programme *Python* suivant pour qu'il calcule et affiche u_n , pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
1. import numpy as np
2. n=int(input('entrer n :'))
3. u=....
4. for k in range(....) :
5.     u=....
6. print(u)
```

2.

(a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 < u_n \leq 1$.

(b) Montrer que la suite est décroissante.

(c) En déduire que la suite est convergente.

3. Soit ℓ la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ montrer que $\ell = f(\ell)$.

4. L'équation $f(x) = x$ a une solution évidente : le nombre 0.

On se propose de rechercher s'il existe d'autres solutions à cette équation.

(a) Montrer que dans $]0, +\infty[$, l'équation $f(x) = x$ équivaut à l'équation $e^x - x - 1 = 0$.

(b) Etudier les variations de la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = e^x - x - 1$.

(c) En déduire que l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution dans $]0, +\infty[$.

5. Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

6. Compléter le programme *Python* suivant afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leq 10^{-4}$:

```
1. import numpy as np
2. n=0
3. u=1
4. while ..... :
5.     u=....
5.     n=....
7. print(n)
```

27) Soit x un réel strictement positif. Mettre sous la forme x^α les nombres suivants :

$$A = x\sqrt{x}, \quad B = \sqrt[5]{x}, \quad C = \sqrt{\sqrt{x^3}}, \quad D = \frac{1}{\sqrt{x^{0.6}}}, \quad E = \sqrt[3]{x}\sqrt[4]{x}, \quad F = \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$$

28) Simplifier chacun des nombres suivants :

$$A = \sqrt[12]{10^{-12}}, \quad B = \sqrt[5]{32}, \quad C = 4^{\frac{3}{2}}, \quad D = 8^{\frac{2}{3}}, \quad E = 27^{\frac{4}{3}}$$

29) Mettre $f(x)$ sous la forme x^α et calculer $f'(x)$

$$f_1(x) = \sqrt[5]{x}, \quad f_2(x) = x\sqrt{x}, \quad f_3(x) = x^2\sqrt[3]{x}, \quad f_4(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}, \quad f_5(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x}, \quad f_6(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$$

30) Résoudre les équations suivantes :

$$(a) 10^x = 3, \quad (b) 0.5^{x+3} = e, \quad (c) 2^{x+3} = 3^{x+2}, \quad (d) \sqrt[5]{x} = 2x$$
