

Systèmes linéaires

1 Définitions

Définitions

- On appelle système linéaire à n équations et p inconnues tout système de condition du type

$$\mathcal{S} \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = y_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = y_n \end{cases}$$

où $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des réels fixés.

- l'inconnue est le p -uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$.
- Une solution du système est un p -uplet de valeurs $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ pour lesquelles les n équations du système sont vérifiées.
- Résoudre $\mathcal{S}$ consiste à trouver l'ensemble des solutions de $\mathcal{S}$.
- Un système n'ayant aucune solution est dit impossible.
- Le système est dit compatible s'il existe au moins une solution.
- Le système $\mathcal{S}$ est dit homogène si $y_1 = \cdots = y_n = 0$.
- Dans le cas général, les coefficients $y_1, \dots, y_p$ sont appelés les seconds membres de $\mathcal{S}$.
- On appelle système homogène associé à $\mathcal{S}$ le système

$$\mathcal{S}' \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases}$$

Exemples :

$$(1) \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y + 3z = 8 \\ x + 2y - 4z = -1 \\ x + y + 2z = -3 \end{cases}$$

est un système linéaire
à 4 équations et 3 inconnues.

$$(2) \begin{cases} 4x + 4y - 2z + 2t = 0 \\ x - y + 3z - t = 0 \\ \quad y + t = 0 \\ 5x + y - z = 0 \end{cases}$$

est un système linéaire homogène
à 4 équations et 4 inconnues.

Pour tous réels (a, b, c)

$$(3) \begin{cases} x + 2y - z = a \\ 2x - y + 3z = b \\ -x + 3y + 2z = c \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{est un système linéaire} \\ \text{à 3 équations et 3 inconnues.} \end{array}$$

Remarques :

1. Un système homogène admet toujours la solution $(0, 0, \dots, 0)$.
2. Si une équation (au moins) est impossible alors le système $\mathcal{S}$ est impossible.

Définition

Deux systèmes $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont dits équivalents lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions.
On note $\mathcal{S} \Leftrightarrow \mathcal{S}'$

La résolution d'un système linéaire peut s'effectuer en utilisant la méthode par substitution, généralement fastidieuse dès que le nombre d'équations ou d'inconnues est supérieures à 2, ou grâce à la méthode d'élimination successive des inconnues de Gauss qui consiste à transformer le système initial en un système équivalent plus simple à résoudre.

2 Systèmes triangulaires

Définition

Le système $\mathcal{S}$ est dit triangulaire s'il se présente sous la forme

$$\mathcal{S} \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ \phantom{a_{1,1}x_1} a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = y_2 \\ \phantom{a_{1,1}x_1} \phantom{a_{2,2}x_2} \ddots \phantom{+ a_{2,p}x_p} \vdots \\ \phantom{a_{1,1}x_1} \phantom{a_{2,2}x_2} \phantom{+ a_{2,p}x_p} a_{n,n}x_n + \dots + a_{n,p}x_p = y_n \end{cases}$$

Si $n = p$

le système s'écrit alors

$$\mathcal{S} \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = y_1 & (L_1) \\ \phantom{a_{1,1}x_1} a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = y_2 & (L_2) \\ \phantom{a_{1,1}x_1} \phantom{a_{2,2}x_2} \ddots \phantom{+ a_{2,n}x_n} \vdots \\ \phantom{a_{1,1}x_1} \phantom{a_{2,2}x_2} \phantom{+ a_{2,n}x_n} a_{n,n}x_n = y_n & (L_n) \end{cases}$$

Lorsque les coefficients $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ sont tous non nuls, le système se résout par substitution successives depuis l'équation L_n jusqu'à L_1 et admet une solution unique.

Exemple :

$$\begin{cases} 2u + v + w = 1 \\ - v - 2w = -4 \\ 4w = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u + v + 1 = 1 \\ - v - 2 = -4 \\ w = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u + 3 = 1 \\ v = 2 \\ w = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1 \\ v = 2 \\ w = 1 \end{cases}$$

Si $n < p$

On peut se ramener au cas précédent en transférant dans le second membre de chaque équation les inconnues $x_{n+1}, \dots, x_p$ dites inconnues auxiliaires.

Lorsque $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ sont tous non nuls, on obtient les valeurs de $x_1, x_2, \dots, x_n$ en fonction des inconnues auxiliaires par substitution successives de L_n à L_1 .

Exemple :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y - 2z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -z \\ y = 5 + 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z - 2y \\ y = 5 + 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 - 5z \\ y = 5 + 2z \end{cases}$$

d'où l'ensemble des solutions du système est

$$\{(-10 - 5z; 5 + 2z; z), z \in \mathbb{R}\}.$$

3 Opérations élémentaires sur les équations d'un système linéaire.

Définition

On appelle opération élémentaire sur les lignes d'un système toute opération de l'un des types suivants :

- $L_i \leftrightarrow L_j$ ($i \neq j$) : échange des lignes L_i et L_j
- $L_i \leftarrow \alpha L_i$ ($\alpha \neq 0$) : multiplication de la ligne L_i par le réel α non nul.
- $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$ ($i \neq j$) : addition d'un multiple de la ligne L_j à la ligne L_i .

Proposition

Si le système $\mathcal{S}'$ est déduit de $\mathcal{S}$ à l'aide d'une opération élémentaire sur les lignes, alors $\mathcal{S}'$ est équivalent à $\mathcal{S}$.

Exemple :

$$\begin{aligned} \begin{cases} y + z = 3 \\ x + 2y + 3z = 8 \\ x - y + z = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 3 \\ 3y + 2z = 8 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3y + 2z = 8 \\ y + z = 3 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_3 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -z = -1 \\ y + z = 3 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ z = 1 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Remarque :

Remplacer l'une des équations de système par la somme de cette équation et des multiples des autres s'obtient par une succession d'opérations élémentaires à partir de $\mathcal{S}$.

Le système ainsi obtenu est donc équivalent à $\mathcal{S}$.

Exemple :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & z & = & 2 \\ -x & + & 2y & + & 2z & = & -1 \\ x & - & 3y & - & z & = & 3 \end{array} \right. & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & & & & & = & 4 \\ -x & + & 2y & + & 2z & = & -1 \\ x & - & 3y & - & z & = & 3 \end{array} \right. \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & x & = & 2 \\ 2y & + & 2z & = & 1 \\ -3y & - & z & = & 1 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & x & = & 2 \\ 2y & + & 2z & = & 1 \\ -4y & & & = & 3 \end{array} \right. \quad L_3 \leftarrow L_2 + 2L_3 \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & 2 \\ & z & = & \frac{5}{4} \\ & y & = & -\frac{3}{4} \end{array} \right. \end{aligned}$$

4 La méthode de Gauss

4.1 Principe

Dans le cas d'un système linéaire de n équations à p inconnues. On admet qu'en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes (et éventuellement des permutations d'inconnues affectées de leur coefficient) on peut transformer $\mathcal{S}$ en un système équivalent du type :

$$\mathcal{S}' \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} a'_{1,1}x_1 & + & a'_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{1,r}x_r & + & \cdots & + & a'_{1,p}x_p & = & y'_1 \\ & & a'_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{2,r}x_r & + & \cdots & + & a'_{2,p}x_p & = & y'_2 \\ & & & & \ddots & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & a'_{r,r}x_r & + & \cdots & + & a'_{r,p}x_p & = & y'_r \\ & & & & & & & & & & 0 & = & y'_{r+1} \\ & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & & & & 0 & = & y'_n \end{array} \right.$$

où les scalaires $a'_{1,1}, \dots, a'_{r,r}$ sont non nuls.

Le système est compatible (admet des solutions) ssi les $n - r$ dernières équations sont vérifiées.

On résout le système triangulaire ainsi obtenu pour terminer la résolution.

4.2 Mise en oeuvre

1. L'un au moins des coefficients de x_1 dans le système est non nul : on choisit l'un d'entre eux. Supposons que l'on ait choisi le premier pivot $a_{i,1}$ c'est à dire le coefficient de x_1 dans la i ème ligne.
2. L'opération élémentaire $L_1 \longleftrightarrow L_i$ transforme $\mathcal{S}$ en un système équivalent dans lequel le coefficient de x_1 dans la première équation est $a_{i,1} = a'_{1,1} \neq 0$.
Notons $a'_{i,j}$ les nouveaux coefficients.

3. Effectuons les opérations élémentaires

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a'_{2,1}}{a'_{1,1}} L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a'_{3,1}}{a'_{1,1}} L_1, \quad \dots, \quad L_n \leftarrow L_n - \frac{a'_{n,1}}{a'_{1,1}} L_1,$$

Les opérations ont pour effet de construire un système équivalent $\mathcal{S}'$ dans lequel l'inconnue x_1 , ne figure que dans la première équation, i.e. de la forme

$$\begin{cases} a'_{1,1}x_1 + a'_{1,2}x_2 + \dots + a'_{1,p}x_p = y'_1 \\ a''_{2,2}x_2 + \dots + a''_{2,p}x_p = y''_2 \\ \vdots \\ a''_{n,2}x_2 + \dots + a''_{n,p}x_p = y''_n \end{cases}$$

4. On recommence avec x_2 et ainsi de suite.

4.3 Exemples

1. Soit $\mathcal{S}_1$ le système défini par

$$\mathcal{S}_1 \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ \boxed{1}x + y - 2z = -3 \\ 2x + y - 2z = -2 \end{cases}$$

Appliquons la méthode du pivot de Gauss.

$$\mathcal{S}_1 \iff \begin{cases} x + y - 2z = -3 \\ 2x - y + z = 3 \\ 2x + y - 2z = -2 \end{cases} \quad L_1 \longleftrightarrow L_2 \quad \text{1 est choisi comme 1}^{er} \text{ pivot}$$

$$\mathcal{S}_1 \iff \begin{cases} x + y - 2z = -3 \\ -3y + 5z = 9 \\ \boxed{-1}y + 2z = 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{On élimine } x \text{ dans les 2}^{ème} \\ \text{et 3}^{ème} \text{ lignes en utilisant le} \\ \text{premier pivot.} \end{array}$$

$$\mathcal{S}_1 \iff \begin{cases} x + y - 2z = -3 \\ -y + 2z = 4 \\ -3y + 5z = 9 \end{cases} \quad L_2 \longleftrightarrow L_3 \quad \begin{array}{l} -1 \text{ est choisi comme 2}^{ème} \\ \text{pivot.} \end{array}$$

$$\mathcal{S}_1 \iff \begin{cases} x + y - 2z = -3 \\ -y + 2z = 4 \\ -z = -3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \longleftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{On élimine } y \text{ dans la 3}^{ème} \text{ ligne} \\ \text{en utilisant le 2}^{ème} \text{ pivot} \end{array}$$

$$\mathcal{S}_1 \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{On termine la résolution} \\ \text{du système en résolvant un} \\ \text{système triangulaire.} \end{array}$$

2. Soit $\mathcal{S}_2$ le système défini par

$$\mathcal{S}_2 \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ \boxed{1}x - y + 3z = 8 \\ x + 2y - z = -3 \\ x + y + 2z = -1 \end{cases}$$

Appliquons la méthode de Gauss

$$\mathcal{S}_2 \iff \begin{cases} x - y + 3z = 8 & L_1 \longleftrightarrow L_2 \\ 2x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = -3 \\ x + y + 2z = -1 \end{cases} \quad \text{On choisit 1 comme 1^{er} pivot.}$$

$$\mathcal{S}_2 \iff \begin{cases} x - y + 3z = 8 \\ \boxed{3}y - 5z = -13 & L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \\ 3y - 4z = -11 & L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \\ 2y - z = -9 & L_4 \longleftarrow L_4 - L_1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{On élimine } x \text{ dans lignes } L_2, \\ L_3 \text{ et } L_4 \text{ en utilisant le premier} \\ \text{pivot.} \\ \text{On choisit 3 comme 2^{ème} pivot.} \end{array}$$

$$\mathcal{S}_2 \iff \begin{cases} x - y + 3z = 8 \\ 3y - 5z = -13 \\ z = 2 & L_3 \longleftarrow L_3 - L_2 \\ 7z = -1 & L_4 \longleftarrow 3L_4 - 2L_2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{On élimine } y \text{ dans lignes } L_3 \text{ et} \\ L_4. \end{array}$$

$$\mathcal{S}_2 \iff \begin{cases} x - y + 3z = 8 \\ 3y - 5z = -13 \\ z = 2 \\ 0 = -15 & L_4 \longleftarrow L_4 - 7L_3 \end{cases}$$

La dernière équation est impossible donc $\mathcal{S}_2$ est incompatible et n'admet pas de solution.

3. Soit $\mathcal{S}_3$ le système défini par

$$\mathcal{S}_3 \begin{cases} x + 2y - z + t = 1 \\ 4x - 10y + 5z - 5t = 1 \\ 2x - 14y + 7z - 7t = -1 \\ 2x - 2y + z - t = 1 \end{cases}$$

Appliquons la méthode de Gauss pour résoudre $\mathcal{S}_3$.

$$\mathcal{S}_3 \iff \begin{cases} x + 2y - z + t = 1 \\ -18y + 9z - 9t = -3 & L_2 \longleftarrow L_2 - 4L_1 \\ -18y + 9z - 9t = -3 & L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1 \\ -6y + 3z - 3t = -1 & L_4 \longleftarrow L_4 - 2L_1 \end{cases}$$

Les lignes L_2 et L_3 sont égales à $3L_4$ donc

$$\mathcal{S}_3 \iff \begin{cases} x + 2y - z + t = 1 \\ 6y - 3z + 3t = 1 & L_2 \longleftarrow -L_4 \end{cases}$$

On choisit x et y comme inconnues principales et z, t comme variables auxiliaires.

$$\mathcal{S}_3 \iff \begin{cases} x + 2y = 1 + z - t \\ 6y = 1 + 3z - 3t \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_3 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{6}(1 + 3z - 3t) \end{cases}$$

Le système $\mathcal{S}_3$ a donc pour solution l'ensemble

$$\left\{ \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}(1 + 3z - 3t), z, t \right) \text{ avec } (z, t) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

4. Soient a, b, c trois réels fixés. Soit $\mathcal{S}_4$ le système défini par

$$\mathcal{S}_4 \begin{cases} x - y + z = a \\ 3x + 2y - z = b \\ 2x - 4y + 5z = c \end{cases}$$

Résolvons $\mathcal{S}_4$ par la méthode de Gauss

$$\mathcal{S}_4 \Longleftrightarrow \begin{cases} x - y + z = a \\ 5y - 4z = b - 3a \\ -2y + 3z = c - 2a \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \longleftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\mathcal{S}_4 \Longleftrightarrow \begin{cases} x - y + z = a \\ 5y - 4z = b - 3a \\ 7z = -16a + 2b + 5c \end{cases} \quad L_3 \longleftarrow 5L_3 + 2L_2$$

$$\mathcal{S}_4 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6a + b - c}{7} \\ y = \frac{-17a + 3b + 4c}{7} \\ z = \frac{-16a + 2b + 5c}{7} \end{cases}$$

Donc $\mathcal{S}_4$ admet pour unique solution le triplet

$$\left(\frac{6a + b - c}{7}, \frac{-17a + 3b + 4c}{7}, \frac{-16a + 2b + 5c}{7} \right)$$

Exercice :

En déduire la résolution du système

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 5 \\ 2x - 4y + 5z = -3 \end{cases}$$

Systèmes linéaires - Exercices

1) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x + y - z = -2 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} 2y - z = 1 \\ -2x - 4y + 3z = -1 \\ x + y - 3z = -6 \end{cases}$$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x - 3y + 7z = 4 \\ x + 2y - 3z = 6 \\ 7x + 4y - z = 22 \end{cases}$$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} 2x + 7y + 3z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 6 \\ x + 5y + 3z = 9 \end{cases}$$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + y = -2 \end{cases}$$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ 4x + y - z = -2 \end{cases}$$

7) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 0 \\ x + y = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

8) Soient a , b et c trois réels.

Donner en fonction de a , b et c la solution du système

$$\begin{cases} x - 2y + 6z = a \\ y - 3z = b \\ -x - 3y + 2z = c \end{cases}$$

d'inconnue (x, y, z) .

9)

1. Soient a , b et c trois réels.

Donner en fonction de a , b et c la solution du système

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + 2y + 4z = b \\ x + 3y + 9z = c \end{cases}$$

d'inconnue (x, y, z) .

2. En déduire les solutions du système dans les cas suivants :

(a) $(a, b, c) = (0, 0, 0)$

(b) $(a, b, c) = (1, 2, 1)$

10) Pour quelles valeurs de k le système

$$\begin{cases} kx + y = 1 \\ x + ky = 1 \end{cases}$$

admet-il :

1. aucune solution ?
2. une solution unique ?
3. une infinité de solution ?

11) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ suivant les valeurs du paramètre m :

$$\begin{cases} x + (m+1)y = 3 \\ mx + (m+4)y = 6 \end{cases}$$