

Calcul matriciel

1 Matrices à n lignes et p colonnes

1.1 Définitions

Définition

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

On appelle **matrice à n ligne et p colonnes** un tableau rectangulaire de nombres réels comportant n lignes et p colonnes.

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Exemples

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$$

est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes.

2.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 7 & 0 & 6 & 1 \\ 3 & -10 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,5}(\mathbb{R})$$

est une matrice à 4 lignes et 5 colonnes.

3. Si $n = 1$, un élément de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ est appelé **matrice ligne**.

$$C = (1 \ 2 \ 3 \ 4) \in \mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$$

est une matrice ligne à 4 colonnes.

4. Si $p = 1$, un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est appelé **matrice colonne**.

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$$

est une matrice colonne à 4 lignes.

5. La **matrice nulle** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice à n lignes et p colonnes dont tous les termes sont nuls.

On la note $0_{n,p}$ ou plus simplement 0 lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

$$0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarques

1. Tout élément de $\mathbb{R}^n$ peut être identifié à une matrice ligne ou à une matrice colonne.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ on note $a_{i,j}$ le terme de A situé à la i -ème ligne et j -ième colonne.
On écrit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

On note également $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ ou encore $A = (a_{i,j})$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur les valeurs de n et p .

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 4}} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$$

On a alors $a_{1,3} = 3$ $a_{2,2} = 0$ $a_{3,2} = 4$ $a_{1,4} = 4$

Proposition

Deux matrices A et B sont égales si et seulement si

$$\begin{cases} \text{elles ont le même format } (n, p) \\ \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, a_{i,j} = b_{i,j} \end{cases}$$

ie ssi elles ont le même nombre de lignes, le même nombre de colonnes et si les coefficients situés à la même place sont égaux.

On note alors $A = B$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 2 \\ d = -4 \end{cases}$$

1.2 Opérations sur les matrices à n lignes et p colonnes

1.2.1 Multiplication d'une matrice par un nombre réel

Définition

Soit $A = (a_{i,j})$ un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On appelle produit de A par le nombre réel λ l'élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ noté λA défini par :

$$\lambda A = (a'_{i,j}) \quad \text{où} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad a'_{i,j} = \lambda a_{i,j}$$

Remarques

1. Autrement dit pour multiplier une matrice par un nombre réel λ on multiplie tous les coefficients de la matrice par ce nombre réel λ .
2. Lorsqu'on multiplie une matrice par un réel on obtient une matrice de même taille.
3. Lorsqu'on multiplie une matrice par un réel, celui-ci s'écrit à gauche de la matrice.

Exemples

$$2 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{5} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & -2 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -3 & -8 & 10 \end{pmatrix}$$

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, λ et μ deux réels

$$1A = A \quad \text{et} \quad \lambda(\mu A) = (\lambda \times \mu)A$$

1.2.2 Addition de deux matrices

Définition

Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On appelle somme de A et B l'élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ noté $A + B$ défini par :

$$A + B = (c_{i,j}) \quad \text{où} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

Remarques

1. Autrement dit pour additionner deux matrices, on additionne entre eux les coefficients situés aux mêmes places
2. On ne peut additionner que deux matrices de même taille et la somme est une matrice de même taille.

Exemples

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

2.

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Proposition

Quelles que soient les matrices A , B et C de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et les réels λ et μ

- $A + B = B + A$
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + C = B + C \Leftrightarrow A = B$
- $0 + A = A + 0 = A$
- $-(A + B) = -A - B$
- $A + (-A) = (-A) + A = 0$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

1.2.3 Multiplication de deux matrices

Pour le produit, on ne multipliera pas entre elles que des matrices de même taille, mais on aura d'autres conditions de "compatibilité" pour que le produit existe.

Définition

Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

On appelle produit de A et B l'élément de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ noté $A \times B$ défini par :

$$A \times B = (c_{i,j}) \quad \text{où} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket \quad c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,p}b_{p,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k}b_{k,j}$$

Disposition pratique des calculs :

$$A \left\{ \left(\begin{array}{ccccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,k} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k} & \cdots & a_{n,p} \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccccc} b_{1,1} & \cdots & b_{1,j} & \cdots & b_{1,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k,1} & \cdots & b_{k,j} & \cdots & b_{k,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p,1} & \cdots & b_{p,j} & \cdots & b_{p,q} \end{array} \right) \right\} B$$

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccccc} c_{1,1} & \cdots & c_{1,j} & \cdots & c_{1,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i,1} & \cdots & c_{i,j} & \cdots & c_{i,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & c_{n,j} & \cdots & c_{n,q} \end{array} \right) \right\} AB$$

$$c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,p}b_{p,j}$$

Le terme $c_{i,j}$ s'obtient en faisant le produit de la i -ième ligne de A par la j -ième colonne de B .

Remarques

- Attention l'ordre d'écriture des deux matrices est important.
- En général A et B sont de taille différentes et AB a encore une autre taille.

Le produit AB de deux matrices n'est possible que si le nombre de colonne de A est égal au nombre de lignes de B .

on obtient alors une matrice ayant autant de lignes que A et autant de colonnes que B .

Exemples

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$.

Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B donc le produit AB existe et

$$A \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \right\} B$$
$$A \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 4 & 5 \\ -7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \right\} AB$$

Par exemple le terme d'indice 2,1 de AB vaut

$$0 \times 1 + 1 \times (-1) + (-2) \times 3 = -7$$

Le produit BA n'existe pas.

2. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

$$A \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} AB \quad \text{et} \quad B \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} BA$$

Les deux produits AB et BA existent par contre

$$AB \neq BA$$

On dit que le produit matriciel n'est pas commutatif.

On remarque également que l'on peut avoir $AB = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$

3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 1 :

1. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Calculer, lorsque c'est possible les produits suivants :

$$AB, BA, AX, XA, AZ, ZA, BX, XB, BZ, ZB, XZ, ZX$$

2. On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $M \times M$

3. On pose $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $N \times N$

4. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Calculer les produits suivants

$$AX_1, \quad AX_2, \quad AX_3$$

Que constate-t-on ?

Proposition : propriétés du produit matriciel

Soient A , B et C trois matrices à coefficients réels et soit λ un réel.

- Si les produits AB et AC sont possibles, on a :

$$A(B + C) = AB + AC$$

- Si les produits AC et BC sont possibles, on a :

$$(A + B)C = AC + BC$$

- Si les produits AB et BC sont possibles, on a :

$$A(BC) = (AB)C$$

- Si le produit AB est possible, on a :

$$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$$

- Si $A = 0$ ou $B = 0$ alors $AB = 0$.

2 Matrices carrées

2.1 Matrices carrées d'ordre n - Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Définition

- On appelle **matrice carrée d'ordre n** toute matrice à n lignes et n colonnes.
- L'ensemble des matrices carrées d'ordre n est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Les coefficients $a_{i,i}$ d'une matrice carrée A (pour lesquels l'indice de colonne est égal à l'indice de ligne) sont appelés **coefficients diagonaux** de la matrice A .
($a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$) est appelée diagonale de A .

Exemples

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice carrée d'ordre 3.

Ses coefficients diagonaux sont 1, 5, 9

2. $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est une matrice carrée d'ordre 2.

Définition : matrice identité

La matrice identité d'ordre n est la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux valent 1. Cette matrice est notée I_n ou tout simplement I s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la taille de la matrice.

$$\text{On a donc } I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

2.2 Opérations sur les matrices carrées

2.2.1 Addition et multiplication de deux matrices carrées

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n (ie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) et λ un réel.

- $A + B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- $\lambda A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- les deux produits AB et BA existent avec $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $BA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Attention, on rappelle que le produit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas commutatif : en général $AB \neq BA$
- Le produit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas intègre :
l'égalité $AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$
de même les égalités $AB = AC$ ou $BA = CA$ n'impliquent pas nécessairement $B = C$
- Les propriétés du produit matriciel énoncées page 6 sont valables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2 :

$$\text{On pose } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits AI_3 et I_3A .

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$AI_n = I_nA = A$$

On dit que la matrice identité est l'élément neutre pour le produit dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

2.2.2 Puissances n -ième d'une matrice

Etant donné $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on définit les puissances de A comme suit :

- $A^0 = I_n$
- $A^1 = A$
- $\forall p \geq 2, \quad A^p = A \times A \times \dots \times A$ (produit de p facteurs A).

On a les propriétés habituelles de calcul sur les puissances entières :

- $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad A^p \times A^q = A^{p+q}$
- $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad (A^p)^q = A^{p \times q}$
- Si $AB = BA$ alors $\forall p \in \mathbb{N}, \quad (AB)^p = A^p B^p$

3 Écriture matricielle d'un système linéaire

- Soit $(\mathcal{S})$ le système linéaire à n équations et p inconnues

$$\mathcal{S} \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = y_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = y_n \end{cases}$$

- On note $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

A est appelée matrice du système $(\mathcal{S})$, X le vecteur colonne des inconnues et Y le vecteur colonne des seconds membres.

- Avec ces notations, le système $(\mathcal{S})$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{c'est à dire} \quad AX = Y$$

L'écriture précédente est appelée **écriture matricielle** du système $(\mathcal{S})$.

Résoudre $(\mathcal{S})$ c'est trouver l'ensemble des matrices $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $AX = Y$.

Exemple

$$\text{On considère le système : } \begin{cases} x - y + z = 4 \\ 3x + 2y - z = -1 \\ 2x - 4y + 5z = 2 \end{cases}$$

$$\text{On pose } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Alors l'écriture matricielle du système est $AX = Y$

Exercices : Calcul matriciel.

1) Calculer lorsqu'ils sont définis les produits AB et BA dans chacun des cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exprimer en fonction de A et B les matrices

$$A^2, \quad AB, \quad BA \quad \text{et} \quad B^2.$$

3) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $A^2 = -2A + 3I$.
 2. Déterminer une matrice B telle que $AB = BA = I$.
-

4) Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Comparer les deux matrices $(A+B)^2$ et $A^2 + 2AB + B^2$.

5) Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ commutent avec A , c'est à dire que $AB = BA$ si et seulement si il existe deux réels a et b tels que $B = aI + bJ$

6) Déterminer deux éléments A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que $AB = 0$ et $BA \neq 0$

7)

1. Résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} y + 2z = a \\ x + y + 2z = b \\ 2y + 3z = c \end{cases}$$

2. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Déterminer une matrice $B \in \mathcal{M}_3(R)$ telle que :

$$X = BY$$

8) On définit la matrice A par :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère les matrices à coefficients réels B et C définies par :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer BC , CB , B^2 et C^2
2. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul :

$$B^n = B, \quad C^n = (-1)^{n-1}C$$

3. Vérifier que l'on a :

$$A = 3B - 2C$$

et

$$A^2 = 5A - 6I$$

où I est la matrice carrée unité d'ordre 2.

4. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$A^n = 3^n B - 2^n C$$

9) On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad , \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par ses deux premiers termes $u_0 = -\frac{1}{2}$ et $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n , par la relation :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n + 3$$

1. Calculer u_2 et u_3 .

On pose pour tout entier naturel n , $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$

2. Montrer que pour tout entier naturel n on a $X_{n+1} = AX_n + B$.
3. Vérifier que $AL + B = L$
4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $X_n = A^n(X_0 - L) + L$

10) On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2, A^3 et montrer que : $A^3 = \frac{1}{2}(A^2 + A)$
2. Prouver, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul, il existe des réels a_n et b_n tels que :

$$A^n = a_n A^2 + b_n A \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_{n+1} &= b_n + \frac{1}{2}a_n \\ b_{n+1} &= \frac{1}{2}a_n \end{cases}.$$

Donner a_1 et b_1

3. Montrer que pour tout n non nul : $a_n + b_n = 1$.
En déduire que : $b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}$
4. Exprimer alors b_n et a_n en fonction de n .
5. Donner explicitement les 9 coefficients de A^n