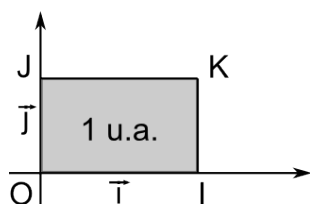


Intégration sur un segment

1 Aire sous la courbe d'une fonction positive

1.1 Définition de l'intégrale



Dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$
l'unité d'aire (u.a.) est l'aire du rectangle
unitaire OIKJ

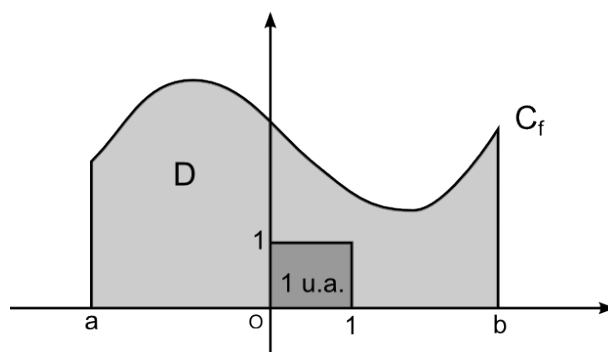
Une fonction positive est représentée par une courbe $\mathcal{C}_f$ située au dessus de l'axe des abscisses.

Définition

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ ($a < b$).

Soit D le domaine du plan délimité par :

- la courbe $\mathcal{C}_f$ (d'équation $y = f(x)$)
- l'axe des abscisses (d'équation $y = 0$)
- les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$



L'aire de D exprimée en unité d'aire est appelée intégrale de f entre a et b .

On note

$$\mathcal{A}(D) = \int_a^b f(x)dx$$

Remarques :

- $\int_a^b f(x)dx$ se lit "intégrale de a à b de $f(x) dx$ ".
- Le domaine D s'écrit :

$$D = \{M(x, y), a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

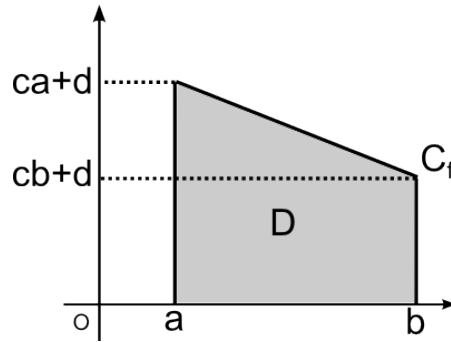
1.2 Cas d'une fonction affine positive

Soit f une fonction affine définie sur $[a, b]$.

On pose $f(x) = cx + d$ et on suppose f positive sur $[a, b]$

$$\text{Soit } I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (cx + d)dx$$

I est l'aire du domaine délimité par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.



I est donc l'aire d'une trapèze. On a donc :

$$\begin{aligned} I = \mathcal{A}(D) &= (b - a) \frac{(ca + d) + (cb + d)}{2} \\ &= (b - a) \frac{c(a + b) + 2d}{2} \\ &= \frac{c}{2} (b - a)(a + b) + (b - a) \times d \\ &= \frac{1}{2} c (b^2 - a^2) + bd - ad \\ &= \left(\frac{1}{2} c \times b^2 + d \times b \right) - \left(\frac{1}{2} c \times a^2 + d \times a \right) \end{aligned}$$

Soit F la fonction définie par

$$F(x) = \frac{1}{2} cx^2 + dx$$

On constate que

$$I = F(b) - F(a)$$

et que la fonction F vérifie

$$F'(x) = cx + d = f(x)$$

On est donc amené pour calculer l'intégrale de f sur $[a, b]$ à déterminer une fonction dont la dérivée est f .

2 Primitives d'une fonction continue sur un intervalle

2.1 Notion de primitive

2.1.1 Définition

Exemple

Soit $F(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ et $f(x) = 3x^2 + 4x$. On a pour tout réel x , $F'(x) = f(x)$.

On dira alors que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Dire que F est une primitive de f sur I signifie que F est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Exemples :

1. La fonction $F(x) = 3x - 1$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(x) = 3$.
2. La fonction $G(x) = x^4 + 5x + 2$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $g(x) = 4x^3 + 5$.
3. La fonction $H(x) = \ln(x)$ est une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $h(x) = \frac{1}{x}$.

Remarques

- Si une fonction est notée par une lettre minuscule (f, g, h) on note généralement une primitive par la lettre majuscule correspondante (F, G, H).
- Pour montrer que F est une primitive de f sur I il suffit de démontrer que pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Exercice 1 :

Soit f et F les deux fonctions définies sur $] - 3, +\infty[$ par $f(x) = \frac{-x(x+6)}{(x+3)^2}$ et $F(x) = \frac{2x-3}{x+3} - x$.

Montrer que F est une primitive de f sur $] - 3, +\infty[$.

2.1.2 Ensemble des primitives d'une fonction

Une fonction donnée admet-elle une primitive ?

On admet le théorème suivant

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

Une fonction donnée peut-elle admettre plusieurs primitives ?

Exemple

Soient

$$F_1(x) = x^2 + 1, F_2(x) = x^2 - 1, F_3(x) = x^2 + 5$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'_1(x) = F'_2(x) = F'_3(x) = 2x = f(x)$$

donc F_1, F_2, F_3 sont trois primitives différentes de f sur $\mathbb{R}$.

Comme la dérivée d'une fonction constante est nulle, on en déduit que deux primitives d'une fonction diffèrent d'une constante.

Théorème

Soit f est une fonction définie sur un intervalle I .

1. Si F est une primitive de f sur I , alors toutes les fonctions $x \mapsto F(x) + k$, où k est un réel quelconque, sont des primitives de f sur I .
2. Si F et G sont deux primitives de f sur I , alors il existe un réel k tel que pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + k$.

Le théorème peut se formuler de la façon suivante :

- deux primitives de f diffèrent d'une constante.
- Si on connaît une primitive F de f sur I alors l'ensemble des primitives de f est l'ensemble des fonctions $F + k$ où k est une constante réelle.

Exercice 2 :

Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction $f(x) = 4x^3 + 5$ sur $\mathbb{R}$.

2.1.3 Primitive prenant une valeur donnée en $x_0 \in I$

Proposition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , x_0 un réel de I et y_0 un réel. (x_0, y_0 fixés). Alors il existe une unique primitive F de f sur I et une seule telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration :

f est continue donc f admet des primitives sur I . Notons G l'une d'entre elles.
L'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions de la forme

$$F(x) = G(x) + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

La condition $F(x_0) = y_0$ équivaut à trouver k tel que

$$F(x_0) = G(x_0) + k = y_0$$

soit $k = y_0 - G(x_0)$, donc l'unique primitive de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$ est

$$F(x) = G(x) + y_0 - G(x_0)$$

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$.

1. Donner une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Donner toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.
3. Donner la primitive G de f sur $\mathbb{R}$ telle que $G(-1) = 0$.

2.2 Calculs de primitives

2.2.1 Primitives des fonctions usuelles

Le tableau suivant est obtenu à partir des résultats connus sur les dérivées. On essaye de "lire à l'envers" les tableaux sur les dérivées.

Une primitive de la fonction f est la fonction F :

$f(x) = \dots$	$F(x) = \dots$	sur l'intervalle
0	c (constante)	$\mathbb{R}$
a (constante)	ax	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2$	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n}$ ($n \geq 2$)	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{x^{n-1}}$	$] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

Exercice 4 :

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$a) f(x) = x^3 \quad b) f(x) = x^5 \quad c) f(x) = \frac{1}{x^4}$$

Exercice 5 :

Donner toutes les primitives de la fonction $g(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$

2.2.2 Primitives de $f + g$ et de kf (avec k réel)

La propriété suivante est une conséquence des propriétés démontrées sur les dérivées.

Proposition

Soient f et g deux fonctions continues sur I ayant pour primitives F et G et soit k un réel. Alors

1. $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I
2. kF est une primitive de kf sur I .

Application :

ce résultat permet de calculer la primitive d'une fonction polynôme.

Exercice 6 :

Calculer une primitive de la fonction f sur $]0, +\infty[$

1. $f(x) = 3x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 7x + 1$,
2. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x$,
3. $f(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}}$,
4. $f(x) = \frac{1}{x^3} - 2x$,
5. $f(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}$.

Exercice 7 :

Soit u la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $u(x) = 2x\sqrt{x}$.

1. Calculer $u'(x)$.
2. En déduire une primitive sur $]0, +\infty[$ de $h(x) = \sqrt{x} + 2$.

2.2.3 Formes usuelles

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de dérivée u' .

Une primitive de la fonction f est la fonction F .

fonction f	primitive F	commentaires
$u' \times u$	$\frac{1}{2}u^2$	
$u' \times u^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	si $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u^n}$ ($n \geq 2$)	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{u^{n-1}}$	si $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	si $u(x) > 0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$	si $u(x) > 0$
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a} \ln(ax+b)$	$a \neq 0$
$u'e^u$	e^u	
e^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b}$	$a \neq 0$

Pour démontrer ces résultats, il suffit de vérifier que la dérivée sur I de chaque primitive proposée est égale à f .

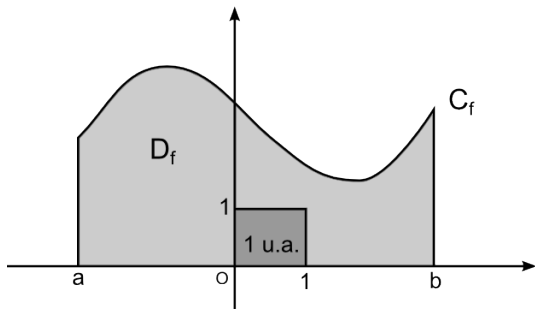
Exercice 8 :

Déterminer une primitive des fonctions suivantes

1. $f(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$
2. $f(x) = (3x^2 + 1)(x^3 + x + 2)$
3. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$
4. $f(x) = \frac{3x}{(x^2 - 1)^4}$
5. $f(x) = (x + 1)\left(\frac{1}{2}x^2 + x - 1\right)^3$
6. $f(x) = e^{2x+3}$
7. $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
8. $f(x) = \frac{4}{3x - 2}$
9. $f(x) = xe^{x^2}$
10. $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

3 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

3.1 Aire d'un domaine



On rappelle que si f est une fonction continue et positive sur $[a, b]$ $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par :

- la courbe C_f
- l'axe des abscisses
- les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$

3.2 Calcul d'une intégrale à l'aide des primitives

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I , et a et b deux réels de cet intervalle.

Comme f est continue sur I , f admet des primitives sur I .

Quelle que soit la primitive F de f sur I , la différence $F(b) - F(a)$ ne dépend pas du choix de cette primitive.

En effet si G est une autre primitive de f sur I , il existe un réel k tel que $G(x) = F(x) + k$ et

$$G(b) - G(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$$

Définition

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

On appelle intégrale de a à b de la fonction f le nombre réel $F(b) - F(a)$ où F désigne une primitive quelconque de f sur $[a, b]$.

On note

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Remarques :

1. On écrit aussi

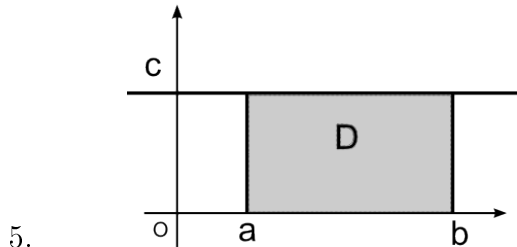
$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

2. Le symbole "dx" n'a aucune signification particulière, si ce n'est de rappeler la démarche des concepteurs du calcul intégral au XVIIIème siècle (Leibnitz) qui considéraient de "petites différences sur x ".
3. La lettre x peut être remplacée par n'importe quelle lettre $t, u, \dots$ à l'exception de a et b . C'est une variable "muette" (n'intervient pas dans le résultat)

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du.$$

4. Pour calculer de nombreuses intégrales, il suffit de voir que la fonction à intégrer est la dérivée d'une fonction connue ie de calculer une primitive. On applique donc

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \text{ où } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } [a, b].$$



Soit c une constante.

$$\text{donc } \int_a^b cdx = [cx]_a^b = cb - ca = c(b-a)$$

c'est l'aire du rectangle de côtés égaux à c et $b-a$

Exercice 9 :

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-1}^1 (x^4 + x^3 - 2x - 1)dx, \quad I_2 = \int_0^1 2xe^{x^2}dx, \quad I_3 = \int_1^2 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx, \quad I_4 = \int_e^3 \frac{1}{x \ln x}dx$$
$$I_5 = \int_0^2 e^{2x+1}dx, \quad I_6 = \int_{-2}^2 \frac{x^3}{x^4+1}dx, \quad I_7 = \int_0^1 x^n(1-x)dx \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

Exercice 10 :

1. Déterminer deux réels a et b tels que

$$\forall x \in [1, 2], \frac{1}{x^2 + 5x + 6} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+3}$$

2. En déduire la valeur de l'intégrale :

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x^2 + 5x + 6}dx$$

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux points de I .

- $\int_a^a f(x)dx = 0$.
- $\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$.

En effet si F est une primitive de f sur I contenant a et b .

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$\text{et } \int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = - \int_a^b f(x)dx.$$

3.3 Relation de Chasles

Proposition

Soit f une application continue sur $[a, b]$.

Alors pour tout $c \in]a, b[$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

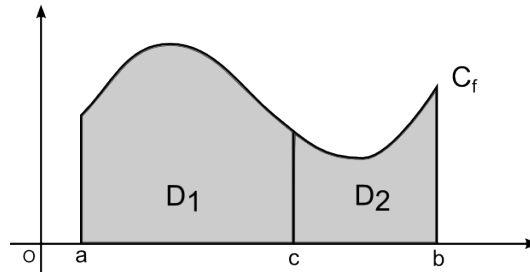
Remarques

- Le résultat reste valable si $a > b$.

On peut donc écrire si f est continue sur I , pour tous réels a , b et c de I on a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- Interprétation géométrique :



Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine grisé dans le cas où f est positive sur $[a, b]$ ($a < b$).

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(D_1) + \mathcal{A}(D_2)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Exercice 11 :

Soit $n \geq 2$. Calculer la somme

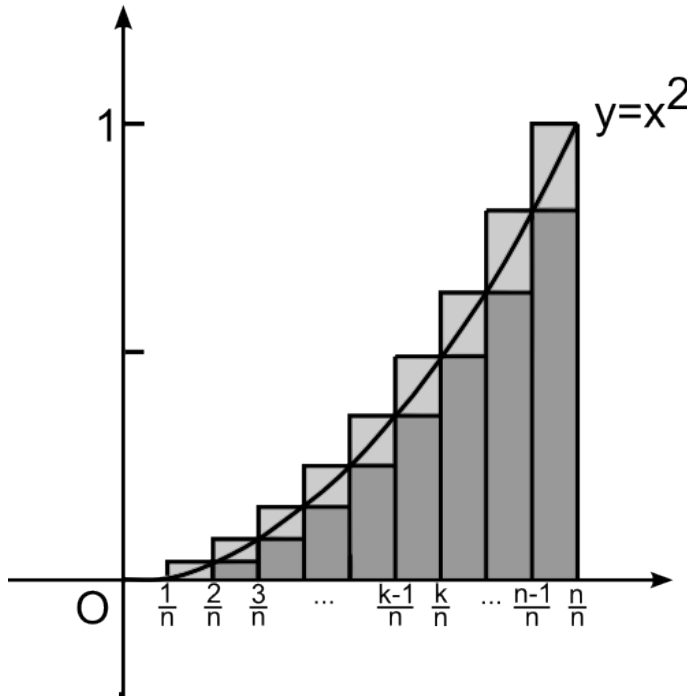
$$S_n = \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$$

en fonction de n

4 Calcul approché d'une aire par la méthode des rectangles

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = x^2$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

On pose $I = \int_0^1 x^2 dx$, donc I est l'aire du domaine du plan situé entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.



Soit $n \geq 1$. On partage le segment $[0,1]$ en n segments de longueur $\frac{1}{n}$ et on désigne par :

- u_n la somme des aires des rectangles situés en dessous de la courbe
- v_n la somme des aires des rectangles situés au dessus de la courbe

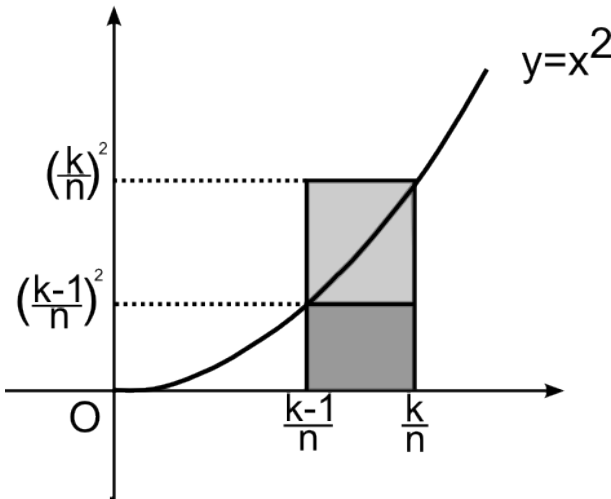
Soit $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ sur l'intervalle $[k-1, k]$:

- l'aire du rectangle situé en dessous de la courbe vaut

$$\left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n}$$

- l'aire du rectangle situé au dessus de la courbe vaut

$$\left(\frac{k}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n}$$



$$u_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n}$$

$$v_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n}$$

On a de plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n \leq I \leq v_n$$

• Or $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n}$. Donc $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les inégalités :

$$u_n \leq I \leq u_n + \frac{1}{n} \Leftrightarrow 0 \leq I - u_n \leq \frac{1}{n}$$

$$v_n - \frac{1}{n} \leq I \leq v_n \Leftrightarrow -\frac{1}{n} \leq I - v_n \leq 0$$

u_n est une valeur approchée par défaut de I à $\frac{1}{n}$ près.

v_n est une valeur approchée par excès de I à $\frac{1}{n}$ près.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc par encadrement on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (I - u_n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (I - v_n) = 0$$

$$\text{d'où} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = I$$

- Calculons v_n :

$$v_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3}{6n^3} = \frac{1}{3}$. On obtient donc :

$$I = \frac{1}{3}$$

Remarque

- Par le calcul à l'aide des primitives on retrouve bien :

$$I = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

- Cette méthode permet de calculer la valeur approchée d'intégrales de fonctions dont on ne sait pas déterminer une primitive.

Intégration sur un segment - exercices

1) Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^2 (t^2 - 3t + 2)dt, \quad I_2 = \int_0^1 e^{-t}dt, \quad I_3 = \int_e^3 \frac{dt}{t \ln(t)}, \quad I_4 = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t}dt$$
$$I_5 = \int_0^1 \frac{e^t}{e^t + 1}dt, \quad I_6 = \int_0^2 \frac{2t + 1}{t^2 + t + 1}dt, \quad I_7 = \int_0^1 te^{1-t^2}dt, \quad I_8 = \int_0^1 \frac{2t + 1}{(t^2 + t + 3)^3}dt$$

2)

1. (a) Déterminer deux réels a et b tels que l'on ait, pour tout réel x différent de -1 et de 5 :

$$\frac{1}{-x^2 + 4x + 5} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{-x + 5}$$

(b) Calculer l'intégrale $\int_0^2 \frac{1}{-x^2 + 4x + 5}dx$

2. Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{(x + 1)(x + 2)}dx$ après avoir décomposé la fraction sous la forme :

$$\frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x + 2}.$$

3) Vérifier que pour tout réel x : $\frac{1}{1 + e^x} = 1 - \frac{e^x}{1 + e^x}$.

En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{1 + e^x}dx$

4) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 + x + 1$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Calculer la valeur de l'aire comprise entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

5) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 - e^{-x}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leq x$

2. (a) Calculer la valeur de l'aire comprise entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

(b) Calculer la valeur de l'aire comprise entre la droite d'équation $y = x$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

(c) en déduire la valeur de l'aire comprise entre la courbe $\mathcal{C}$, la droite d'équation $y = x$ et les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 1$

6) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{1}{e^t + 2 + e^{-t}}$$

1. (a) Montrer que f est positive et continue sur $\mathbb{R}$.
Vérifier que f est paire.
- (b) Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.
- (c) Pour tout réel t , calculer $f'(t)$ et étudier son signe.
En déduire le tableau des variations de f .
- (d) Tracer l'allure de la courbe représentative (C) de f .
2. (a) Vérifier que pour tout réel t :

$$f(t) = \frac{e^t}{(e^t + 1)^2}$$

- (b) On pose pour tous réels a et b tels que $a \leq b$ l'intégrale :

$$J(a, b) = \int_a^b f(t) dt$$

Montrer que :

$$J(a, b) = \frac{1}{1 + e^a} - \frac{1}{1 + e^b}$$

- (c) Interpréter graphiquement l'intégrale précédente.

7) On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par

$$g(x) = x^2 + \ln(x) - 2$$

On donne $\ln(2) \approx 0,7$.

1. (a) Calculer la dérivée g' puis étudier les variations de g .
- (b) Calculer les limites de g en 0 à droite et en $+\infty$.
- (c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ d'inconnue $x > 0$ admet une unique solution que l'on notera α . Justifier que $1 < \alpha < 2$.
- (d) Donner le signe de $g(x)$ en établissant les cas $x < \alpha$, $x = \alpha$, $x > \alpha$.
- (e) Tracer dans un repère orthonormé l'allure de la courbe représentative de g , en faisant apparaître les points de cette courbe d'abscisse $x = 1$, $x = \alpha$ et $x = 2$.
2. (a) Montrer que la fonction $F(x) = x \ln(x) - x$ est une primitive de $f(x) = \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$.
- (b) En utilisant la relation vérifiée par α , montrer que :

$$\int_1^\alpha g(x) dx = \frac{8 - 2\alpha^3}{3} - \alpha$$

- (c) Hachurer la zone du plan correspondant à cette intégrale sur le graphe de la question 1.(e).

8) On considère la fonction f définie, pour tout réel x de $[0, +\infty[$, par la relation :

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$$

1. (a) On note f' la dérivée de f . Calculer, pour tout réel x positif, $f'(x)$.
 - (b) Etudier, suivant les valeurs de x , le signe de $f'(x)$.
 - (c) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
 - (d) Dresser le tableau de variation de f .
- On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et la relation : pour tout n de $\mathbb{N}$

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

2. (a) Calculer u_1 et u_2 .
- (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$0 < u_n \leq \frac{1}{n}$$

- (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. On pose , pour tout entier naturel n :

$$v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$$

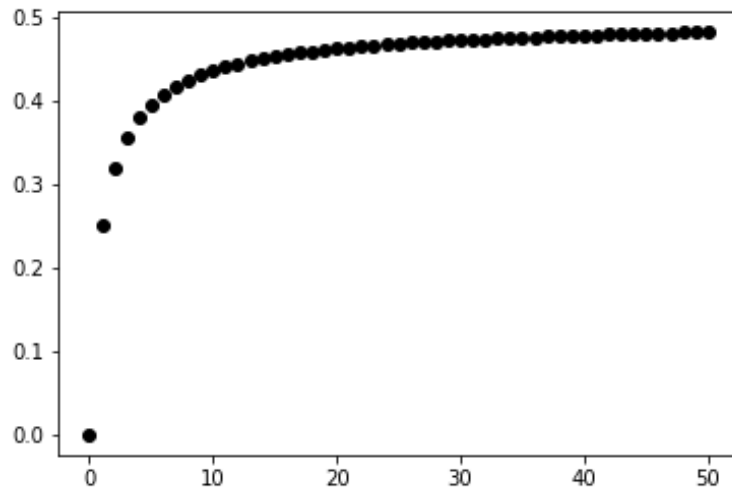
- (a) Recopier et compléter le programme Python suivant afin qu'il calcule et affiche les valeurs de u_n et v_n pour une valeur n entrée par l'utilisateur :

```
1. n=int(input('entrer n :'))
2. u=1
3. v=...
4. for k in range(...):
5.     a=u
6.     u=...
7.     v=...
8. print(u,v)
```

- (b) On considère le programme suivant :
Que contient la variable y à l'issue du programme ?

```
1. import numpy as np
2. import matplotlib.pyplot as plt
3. x=np.arange(51)
4. u=np.ones(51)
5. for k in range(1,51):
6.     u[k]=u[k-1]/(u[k-1]+1)**2
7. y=x*u
8. plt.plot(x,y, 'ko')
```

- (c) Ce programme fournit la sortie graphique suivante . Quel résultat ce graphique permet-il de conjecturer ?



4. (a) Pour tout entier naturel n , exprimer v_n en fonction de u_n .
 (b) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, l'encadrement suivant :

$$2 \leq v_n \leq 2 + \frac{1}{n}$$

5. Montrer par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$2(n+1) \leq \frac{1}{u_n} \leq 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

6. (a) Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, comparer $\frac{1}{k}$ et $\int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt$.

- (b) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'inégalité suivante : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$

7. Utiliser les questions précédentes pour déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n$ et retrouver le résultat de la question 3c)