

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{4}{1 + e^x}.$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Partie 1

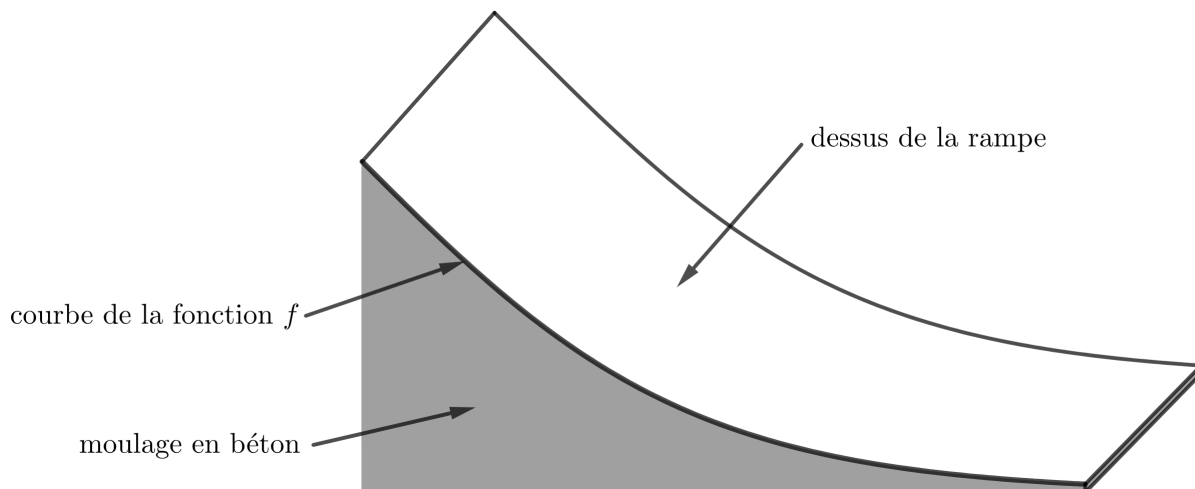
1. (a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
La courbe représentative de f admet-elle une asymptote en $-\infty$? Si oui, donner son équation.
- (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
La courbe représentative de f admet-elle une asymptote en $+\infty$? Si oui, donner son équation.
2. (a) Calculer la dérivée de f et déterminer le signe de f' .
- (b) Dresser le tableau de variation de f en faisant apparaître les limites et la valeur de $f(0)$.
- (c) Quelle est la position de la courbe représentative de f par rapport à la droite d'équation $y = 4$?
- (d) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 0$.
3. (a) Montrer que la dérivée seconde de f est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = \frac{4e^x(e^x - 1)}{(1 + e^x)^3}.$$

- (b) En déduire que f possède un unique point d'inflexion et préciser un intervalle sur lequel f est convexe et un intervalle sur lequel f est concave.
- (c) Déterminer alors la position relative de la courbe représentative de f avec sa tangente au point d'abscisse $x = 0$.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f , les asymptotes et la tangente au point d'abscisse 0.
5. (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 4 \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$.
- (b) Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

Partie 2

1. Soit g la fonction définie sur $]0, 4[$ par $g(y) = \ln\left(\frac{4}{y} - 1\right)$ pour tout réel y de $]0, 4[$.
 - (a) Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, 4[$.
 - (b) i. Pour tout $y \in]0, 4[$, calculer $f(g(y))$.
 - ii. Que représente la fonction g pour la fonction f ?
 - (c) Déterminer les réels x tels que $0,05 \leq f(x) \leq 2$.
2. Un fabricant de rampes de skatepark veut lancer un prototype de rampe. Ainsi il crée une rampe de skatepark dont le profil, c'est-à-dire la forme de la pente, est la courbe de la fonction f . La largeur de la rampe est 1 mètre.
Ce fabricant souhaite que la hauteur maximale de cette rampe soit 2 mètres et que la hauteur minimale soit 5 centimètres.
 - (a) Démontrer que la longueur sur le sol de la rampe vaut $\ln(79)$ mètres.
 - (b) La rampe est conçue par un moulage en béton et prévoit une pente d'un mètre de large si bien que le volume total de béton prévu est donné par l'aire de la surface du profil (surface grisée).
Déterminer le volume de béton à prévoir pour construire la rampe.



Exercice 2

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 4 \ln(x)$$

1. Etudier le sens de variation de g , et vérifier que g admet un minimum sur $]0, +\infty[$ égal à $2(1 - \ln(2))$.
2. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel x de $]0, +\infty[$.

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1 + \ln(x)}{x}$$

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité graphique 2 cm).

3. Déterminer la limite de f en 0.
Interpréter graphiquement le résultat.
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$
5. Montrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = \frac{x}{4}$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.
6. Etudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et de $(\mathcal{D})$.
On montrera en particulier que $(\mathcal{D})$ coupe $(\mathcal{C})$ en un point A dont on calculera les coordonnées.
7. Etudier le sens de variation de f . Dresser le tableau de variation de f .
8. (a) Vérifier que pour tout réel x de $]0, +\infty[$, on a

$$f''(x) = \frac{2 \ln(x) - 1}{x^3}$$

- (b) Etudier la convexité de f . la courbe $(\mathcal{C})$ possède-t-elle des points d'inflexion ?

9. On donne :

$$\frac{1}{e} \approx 0,4 \quad \sqrt{e} \approx 1,6 \quad f(\sqrt{e}) \approx 1,3 \quad f'(\sqrt{e}) \approx 0,1$$

Représenter la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite $(\mathcal{D})$ dans un même repère orthonormé.

10. (a) Déterminer la dérivée de la fonction u définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$u(x) = (\ln(x))^2$$

- (b) En déduire que $\int_1^e f(x) dx = \frac{e^2 + 11}{8}$

Exercice 3

Partie A

- Justifier que l'équation $x^2 + x + 1 = 0$, d'inconnue réelle x , n'admet aucune solution.
On considère alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{1+x+x^2}$$

On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f

- Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Dresser, en le justifiant, le tableau de variations de f . On remarquera en particulier que f est croissante sur l'intervalle $[-1,1]$.
- (a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0 .
(b) Montrer que pour tout réel x de $[-1, +\infty[$, on a : $f(x) \leq x$ Donner une interprétation graphique de ce résultat.
- Tracer l'allure de $(\mathcal{C}_f)$ et (T) dans un repère orthonormé. On soignera en particulier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (T)

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{1+u_n+u_n^2}$$

- Vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1+\frac{1}{n}}$$

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}$$

- Montrer, en raisonnant par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$$

- En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et préciser sa limite.
- Recopier et compléter le script du programme Python suivant, pour qu'il affiche le plus petit entier naturel non nul n tel que $u_n \leq 1/1000$

```
1. def f(x) :  
2.     return x/(1+x+x**2)  
3. u=....  
5. n=....  
6. while ..... :  
7.     u=....  
8.     n=....  
9. print(....)
```

Partie C

On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

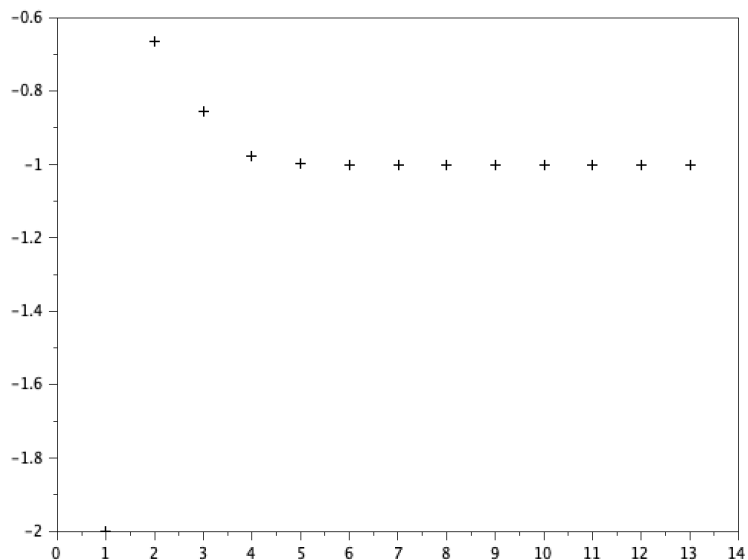
$$v_1 = -2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} = f(v_n) = \frac{v_n}{1+v_n+v_n^2}$$

- En utilisant la question 3 de la Partie A, démontrer par récurrence que :

$$\forall n \geq 2, -1 \leq v_n \leq 0$$

- En utilisant la question 4 de la Partie A, montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.

3. En déduire la convergence de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$
4. A l'aide de Python, on trace les premiers termes de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, et on obtient la figure ci-dessous.
Conjecturer alors la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$



5. (a) Résoudre l'équation $f(x) = -1$, d'inconnue réelle x .
- (b) Montrer par l'absurde que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \neq -1$$