

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{4}{1 + e^x},$$

et l'on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Partie 1

1. (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{4}{1 + 0} = 4$:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4}$$

On en déduit que la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 4$ en $-\infty$.

- (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^x) = +\infty$ et

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$$

$\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$ (l'axe des abscisses).

2. (a) On a $f(x) = 4 \times \frac{1}{1 + e^x}$, donc

$$f'(x) = 4 \times \left(\frac{-e^x}{(1 + e^x)^2} \right),$$

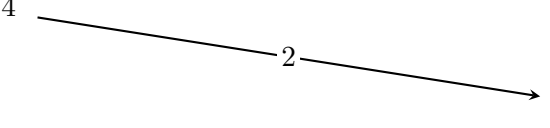
soit

$$\boxed{f'(x) = \frac{-4e^x}{(1 + e^x)^2}}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $(1 + e^x)^2 > 0$, donc

$$\boxed{f'(x) < 0}$$

- (b) f est donc décroissante sur $\mathbb{R}$, avec $f(0) = \frac{4}{1 + e^0} = \frac{4}{1 + 1} = 2$, d'où le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, donc $1 + e^x > 1$ et $\frac{1}{1 + e^x} < 1$, soit

$$\frac{4}{1 + e^x} < 4 \quad \text{et} \quad f(x) < 4.$$

$\mathcal{C}_f$ est en dessous de la droite d'équation $y = 4$ sur $\mathbb{R}$

(d) La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 a pour équation

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0),$$

$$\text{avec } f(0) = 2 \text{ et } f'(0) = \frac{-4 \times e^0}{(1 + e^0)^2} = \frac{-4}{2^2} = -1, \text{ soit}$$

$$y = -x + 2$$

3. (a) On écrit $f'(x) = \frac{-4e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec

$$u(x) = -4e^x \quad \text{donc} \quad u'(x) = -4e^x, \quad v(x) = (1 + e^x)^2 \quad \text{donc} \quad v'(x) = 2 \times e^x \times (1 + e^x).$$

Alors

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\
 &= \frac{-4e^x(1 + e^x)^2 - (-4e^x) \times 2e^x(1 + e^x)}{\left((1 + e^x)^2\right)^2} \\
 &= \frac{-4e^x(1 + e^x)^2 + 8(e^x)^2(1 + e^x)}{(1 + e^x)^4} \\
 &= \frac{-4e^x(1 + e^x) + 8(e^x)^2}{(1 + e^x)^3} \quad (\text{en simplifiant par } (1 + e^x)) \\
 &= \frac{4e^x(-(1 + e^x) + 2e^x)}{(1 + e^x)^3},
 \end{aligned}$$

soit

$$f''(x) = \frac{4e^x(e^x - 1)}{(1 + e^x)^3}$$

(b) Sur $\mathbb{R}$, $4e^x > 0$ et $(1 + e^x)^3 > 0$, donc $f''(x)$ est du signe de $e^x - 1$. Or

$$e^x - 1 = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

Sur $]-\infty; 0[$, $f''(x) < 0$ et f est concave.

Sur $]0; +\infty[$, $f''(x) > 0$ et f est convexe.

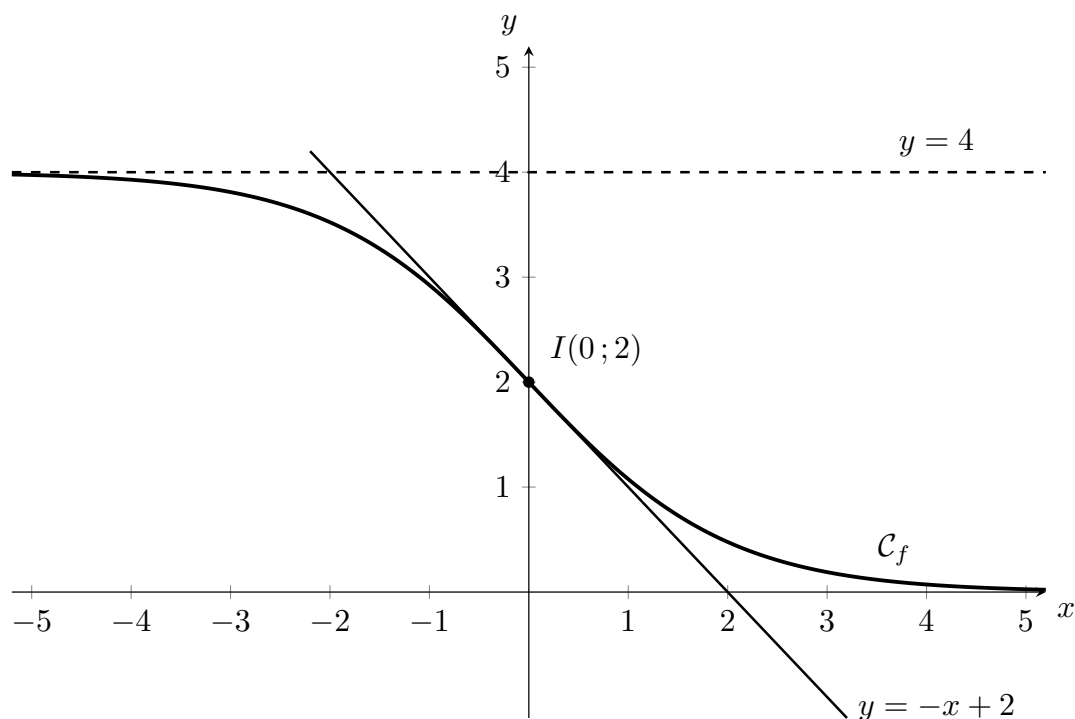
f'' s'annule et change de signe en 0, donc

$\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion de coordonnées $(0; f(0)) = (0; 2)$

(c) Sur $]-\infty; 0[$, f est concave, donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de sa tangente au point d'abscisse 0.

Sur $]0; +\infty[$, f est convexe, donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0.

4. Tracé de $\mathcal{C}_f$, de son asymptote d'équation $y = 4$ et de sa tangente au point d'abscisse 0



5. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. En multipliant le numérateur et le dénominateur par e^{-x} :

$$f(x) = \frac{4}{1 + e^x} = \frac{4e^{-x}}{(1 + e^x) \times e^{-x}} = \frac{4e^{-x}}{e^{-x} + e^x \times e^{-x}},$$

soit

$$f(x) = 4 \times \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

(b) On pose $u(x) = 1 + e^{-x}$; alors $u'(x) = -e^{-x}$ et

$$f(x) = -4 \times \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} = -4 \times \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Comme $u > 0$ sur $\mathbb{R}$, les primitives de f sont les fonctions

$$F(x) = -4 \ln(u(x)) + k = -4 \ln(1 + e^{-x}) + k,$$

et

$$F(0) = 0 \iff -4 \ln(2) + k = 0 \iff k = 4 \ln(2).$$

La primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 est la fonction

$$F(x) = -4 \ln(1 + e^{-x}) + 4 \ln(2)$$

Partie 2

On considère la fonction g définie sur $]0; 4[$ par $g(y) = \ln\left(\frac{4}{y} - 1\right)$.

1. (a) D'après la question 2.b) de la partie 1, f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle

$$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[=]0; 4[.$$

- (b) i. Soit $y \in]0; 4[$. On a

$$f(g(y)) = f\left(\ln\left(\frac{4}{y} - 1\right)\right) = \frac{4}{1 + e^{\ln\left(\frac{4}{y} - 1\right)}} = \frac{4}{1 + \frac{4}{y} - 1} = \frac{4}{\frac{4}{y}} = y,$$

soit

$$\forall y \in]0; 4[, \quad f(g(y)) = y$$

- ii. ★ Pour tout $y \in]0; 4[$, $f(g(y)) = y$.

★ Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $f(x) \in]0; 4[$ et

$$g(f(x)) = g\left(\frac{4}{1 + e^x}\right) = \ln\left(\frac{4}{\frac{4}{1 + e^x}} - 1\right) = \ln(1 + e^x - 1) = \ln(e^x) = x.$$

$$g \text{ est la bijection réciproque de la fonction } f$$

- (c) Comme f est décroissante sur $\mathbb{R}$, g est décroissante sur $]0; 4[$ (f et f^{-1} ont le même sens de variation), donc

$$\begin{aligned} 0,05 \leq f(x) \leq 2 &\iff g(0,05) \geq g(f(x)) \geq g(2) \\ &\iff \ln\left(\frac{4}{0,05} - 1\right) \geq x \geq \ln\left(\frac{4}{2} - 1\right) \\ &\iff \ln(80 - 1) \geq x \geq \ln(1), \end{aligned}$$

soit

$$0,05 \leq f(x) \leq 2 \iff 0 \leq x \leq \ln(79)$$

2. (a) La hauteur de la pente au point d'abscisse x vaut $f(x)$. On vient de montrer que $0,05 \leq f(x) \leq 2$ pour $0 \leq x \leq \ln(79)$.

La longueur au sol de la rampe vaut $\ln(79)$ mètres

- (b) La fonction f étant positive, l'aire de la surface grisée vaut $\int_0^{\ln(79)} f(x) \, dx$. Or

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln(79)} f(x) \, dx &= \left[F(x) \right]_0^{\ln(79)} = F(\ln(79)) - F(0) \\ &= -4 \ln \left(1 + e^{-\ln(79)} \right) + 4 \ln(2) \\ &= -4 \ln \left(1 + e^{\ln(\frac{1}{79})} \right) + 4 \ln(2) \\ &= -4 \ln \left(1 + \frac{1}{79} \right) + 4 \ln(2) \\ &= -4 \ln \left(\frac{80}{79} \right) + 4 \ln(2) \\ &= 4 \ln \left(\frac{79}{80} \right) + 4 \ln(2) \\ &= 4 \ln \left(2 \times \frac{79}{80} \right) = 4 \ln \left(\frac{79}{40} \right). \end{aligned}$$

Le volume en béton à prévoir pour construire la rampe est de $4 \ln \left(\frac{79}{40} \right)$ mètres cubes

Exercice 2

Partie I

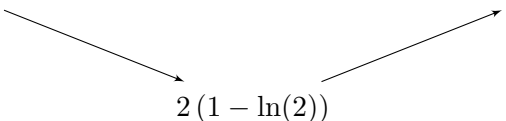
1. La fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et, pour tout $x > 0$,

$$g'(x) = 2x - \frac{4}{x} = \frac{2x^2 - 4}{x}.$$

Or

$$2x^2 - 4 = 0 \iff 2x^2 = 4 \iff x^2 = 2 \iff x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{2},$$

et $2x^2 - 4$ est un polynôme de degré 2, donc du signe du coefficient de x^2 à l'extérieur des racines. D'où, sur $]0; +\infty[$:

x	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$2x^2 - 4$	-	0	+
x	+		+
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			

avec

$$g(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 4 \ln(\sqrt{2}) = 2 - 4 \times \frac{1}{2} \ln(2) = 2 - 2 \ln(2) = 2(1 - \ln(2)).$$

D'après les variations de g ,

$$g \text{ admet pour minimum } 2(1 - \ln(2)) \text{ sur }]0; +\infty[$$

2. On a $2 < e$ (avec $e \approx 2,7$) et la fonction logarithme est croissante, donc

$$\ln(2) < \ln(e) \quad \text{soit} \quad \ln(2) < 1.$$

Alors $1 - \ln(2) > 0$, donc $2(1 - \ln(2)) > 0$ et

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad g(x) \geq 2(1 - \ln(2)) > 0$$

3. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{4} = 0$ et

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln(x)) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+ \end{array} \right\} \text{ par quotient } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \ln(x)}{x} = -\infty,$$

donc par somme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

La fonction f admet une limite infinie en 0, donc l'axe des ordonnées est asymptote verticale à $\mathcal{C}$.

4. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4} = +\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

par croissances comparées (la puissance l'emporte sur le logarithme), donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

5. Pour tout $x > 0$,

$$f(x) - \frac{x}{4} = \frac{1 + \ln(x)}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{x}{4} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln(x)}{x} = 0,$$

donc

$$\text{la droite } \mathcal{D} \text{ d'équation } y = \frac{x}{4} \text{ est asymptote oblique à } \mathcal{C} \text{ en } +\infty$$

6. Pour obtenir la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, on étudie le signe de $f(x) - \frac{x}{4}$, c'est-à-dire de $\frac{1 + \ln(x)}{x}$.

Sur $]0; +\infty[$ on a $x > 0$, donc $f(x) - \frac{x}{4}$ est du signe de $1 + \ln(x)$, et

$$1 + \ln(x) \geq 0 \iff \ln(x) \geq -1 \iff x \geq e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

D'où :

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f(x) - \frac{x}{4}$		0	+

— sur $\left]0; \frac{1}{e}\right[$, $f(x) - \frac{x}{4} < 0$ et $\mathcal{C}$ est en dessous de $\mathcal{D}$;

— sur $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$, $f(x) - \frac{x}{4} > 0$ et $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{D}$.

Enfin

$$\mathcal{C} \text{ et } \mathcal{D} \text{ ont un point commun } A\left(\frac{1}{e}; \frac{1}{4e}\right)$$

7. La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{x} \times x - (1 + \ln(x)) \times 1}{x^2} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1 - 1 - \ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{\ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - 4 \ln(x)}{4x^2}, \end{aligned}$$

d'où

$$f'(x) = \frac{g(x)}{4x^2}$$

Comme $g(x) > 0$ et $4x^2 > 0$ sur $]0; +\infty[$, on a $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

8. (a) On a $f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{\ln(x)}{x^2}$, donc

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln(x) \times 2x}{(x^2)^2} \\ &= -\frac{x - 2x \ln(x)}{x^4} \\ &= \frac{-x + 2x \ln(x)}{x^4}, \end{aligned}$$

soit, en simplifiant le numérateur et le dénominateur par x ,

$$\boxed{f''(x) = \frac{2 \ln(x) - 1}{x^3}}$$

(b) On a

$$2 \ln(x) - 1 \geq 0 \iff 2 \ln(x) \geq 1 \iff \ln(x) \geq \frac{1}{2} \iff x \geq e^{1/2} = \sqrt{e}.$$

D'où :

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$2 \ln(x) - 1$	-	0	+
x^3	+		+
$f''(x)$	-	0	+

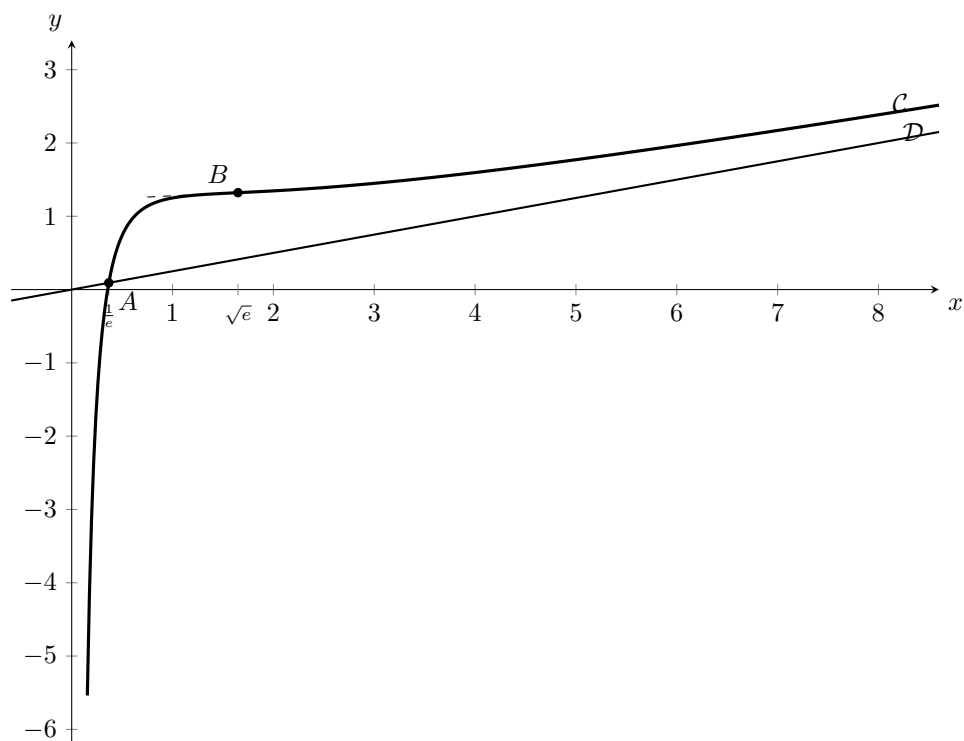
— sur $]0; \sqrt{e}[$, $f''(x) < 0$ et f est concave ;

— sur $]\sqrt{e}; +\infty[$, $f''(x) > 0$ et f est convexe.

f'' s'annule et change de signe en $\sqrt{e}$, donc

$$\boxed{\mathcal{C} \text{ admet un point d'inflexion de coordonnées } B(\sqrt{e}; f(\sqrt{e}))}$$

9. Représentation graphique de $\mathcal{C}$ et de son asymptote $\mathcal{D}$:



10. (a) La fonction u est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$u'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x)$$

(b) D'après la question précédente, pour tout $x > 0$,

$$\frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{2} u'(x),$$

donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} (\ln(x))^2$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

Or, pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1 + \ln(x)}{x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x},$$

donc la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par

$$F(x) = \frac{x^2}{8} + \ln(x) + \frac{1}{2} (\ln(x))^2$$

est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

La fonction f est continue sur $]0; +\infty[$ et $[1; e] \subset]0; +\infty[$, donc

$$\begin{aligned}\int_1^e f(x)dx &= \left[\frac{x^2}{8} + \ln(x) + \frac{1}{2} (\ln(x))^2 \right]_1^e \\ &= \left(\frac{e^2}{8} + \ln(e) + \frac{1}{2} (\ln(e))^2 \right) - \left(\frac{1^2}{8} + \ln(1) + \frac{1}{2} (\ln(1))^2 \right) \\ &= \left(\frac{e^2}{8} + 1 + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{8} \quad \text{car } \ln(e) = 1 \text{ et } \ln(1) = 0 \\ &= \frac{e^2}{8} - \frac{1}{8} + \frac{3}{2} \\ &= \frac{e^2 - 1 + 12}{8},\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\int_1^e f(x)dx = \frac{e^2 + 11}{8}}$$

Exercice 3

Partie A

1. $x^2 + x + 1 = 0$ est une équation de degré 2. Son discriminant vaut

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0,$$

donc

$$\boxed{\text{l'équation } x^2 + x + 1 = 0 \text{ n'a pas de solution}}$$

2. La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ et en $-\infty$ est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

de même

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

3. Pour obtenir les variations de f on étudie le signe de f' .

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= \frac{1 \times (1 + x + x^2) - x \times (1 + 2x)}{(1 + x + x^2)^2} \\ &= \frac{1 + x + x^2 - x - 2x^2}{(1 + x + x^2)^2} \\ &= \frac{1 - x^2}{(1 + x + x^2)^2}.\end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$1 - x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$
$(1 + x + x^2)^2$	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

On obtient le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0		-1		$\frac{1}{3}$		0

avec

$$f(-1) = \frac{-1}{1-1+1} = -1 \quad \text{et} \quad f(1) = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}.$$

4. (a) La tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0),$$

avec

$$f'(0) = \frac{1-0}{(1+0+0^2)^2} = 1 \quad \text{et} \quad f(0) = 0,$$

d'où

$$\boxed{y = x}$$

(b) Sur $[-1; +\infty[$,

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{x}{1+x+x^2} - x = \frac{x - x(1+x+x^2)}{1+x+x^2} \\ &= \frac{x - x - x^2 - x^3}{1+x+x^2} \\ &= \frac{-x^2 - x^3}{1+x+x^2} \\ &= \frac{-x^2(1+x)}{1+x+x^2}. \end{aligned}$$

$1+x+x^2$ est un polynôme de degré 2 qui ne s'annule pas, il est donc du signe du coefficient de x^2 sur $\mathbb{R}$, soit

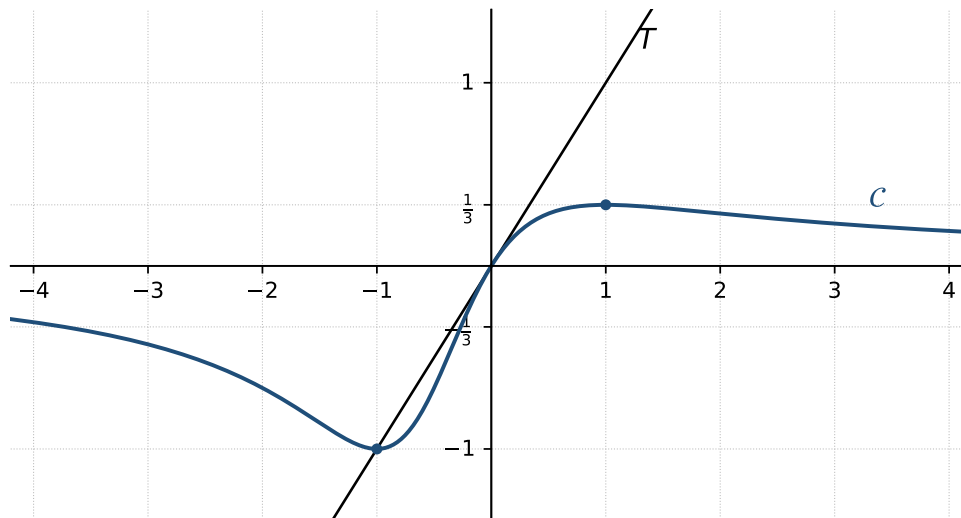
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1+x+x^2 > 0.$$

De plus $-x^2 \leq 0$ et, sur $[-1; +\infty[$, $1+x \geq 0$; d'où sur $[-1; +\infty[$

$$f(x) - x \leq 0 \quad \text{et} \quad f(x) \leq x.$$

Sur $[-1; +\infty[$, la courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de la tangente T

5. Représentation graphique de $\mathcal{C}$ et de T :



Partie B

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2},$$

soit, en multipliant le numérateur et le dénominateur par n ,

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n + 1 + \frac{1}{n}}$$

Or $n + 1 + \frac{1}{n} \geq n + 1$ (car $\frac{1}{n} > 0$), donc, comme la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$,

$$\frac{1}{n + 1 + \frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n + 1} \quad \text{et} \quad f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n + 1}$$

2. Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ ».

Initialisation : $u_1 = 1$, donc $0 \leq u_1 \leq \frac{1}{1}$ et la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : supposons la propriété vraie au rang n , montrons qu'elle l'est encore au rang $n + 1$.
Par hypothèse de récurrence

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n} \leq 1.$$

La fonction f est croissante sur $[0; 1]$, donc

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{n}\right),$$

soit

$$0 \leq u_{n+1} \leq f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{d'après la question précédente.}$$

On a donc la propriété au rang $n+1$.

Conclusion : par récurrence, on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$$

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc d'après le théorème d'encadrement (u_n) converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

```
4. def f(x):  
    return x/(1+x*x**2)  
  
    u = 1  
    n = 1  
    while u > 10**(-3):  
        u = f(u)  
        n = n+1  
    print(n)
```

Partie C

1. Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $-1 \leq v_n \leq 0$ ».

Initialisation : $v_2 = f(v_1) = f(-2)$. Or, d'après les variations de f ,

$$\forall x \in]-\infty; -1], \quad -1 \leq f(x) \leq 0,$$

donc $-1 \leq f(-2) \leq 0$, et $-1 \leq v_2 \leq 0$: la propriété est vraie au rang 2.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier $n \geq 2$ pour lequel la propriété est vraie. Par hypothèse de récurrence

$$-1 \leq v_n \leq 0.$$

f est croissante sur $[-1; 0]$, donc

$$f(-1) \leq f(v_n) \leq f(0),$$

soit $-1 \leq v_{n+1} \leq 0$, et la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : par récurrence, on a montré que

$$\forall n \geq 2, \quad -1 \leq v_n \leq 0$$

2. Soit $n \geq 2$. Sur $[-1; +\infty[$ on a $f(x) \leq x$, donc comme $-1 \leq v_n \leq 0$,

$$f(v_n) \leq v_n, \quad \text{soit} \quad v_{n+1} \leq v_n.$$

La suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est décroissante

3. La suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est décroissante et minorée par -1 , donc d'après le théorème de la limite monotone

$$(v_n) \text{ est convergente}$$

4. On peut conjecturer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -1$$

5. (a)

$$\begin{aligned} f(x) = -1 &\iff \frac{x}{1+x+x^2} = -1 \\ &\iff x = -(1+x+x^2) \\ &\iff x = -1-x-x^2 \\ &\iff x^2+2x+1 = 0 \\ &\iff (x+1)^2 = 0 \\ &\iff x+1 = 0 \\ &\iff x = -1. \end{aligned}$$

- (b) Supposons qu'il existe un entier $n \geq 2$ tel que $v_n = -1$.

Alors $f(v_n) = -1$, c'est-à-dire $v_{n+1} = -1$ d'une part ; et, comme $v_n = f(v_{n-1})$, on a $f(v_{n-1}) = -1$, soit $v_{n-1} = -1$ d'après la question précédente. En redescendant ainsi de proche en proche, on aurait $v_k = -1$ pour tout $k \geq 2$, et en particulier $v_2 = -1$.

Or $v_2 = f(-2) = \frac{-2}{1-2+4} = -\frac{2}{3} \neq -1$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \neq -1$$