

## Polynômes à coefficients réels

### 1 Fonctions affines

#### 1.1 Définition, sens de variation, signe

##### Définition

Une fonction affine est une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = ax + b$$

où  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels.

##### Remarques :

- si  $b = 0$   $f$  est dite linéaire.
- si  $a = 0$   $f$  est dite constante.

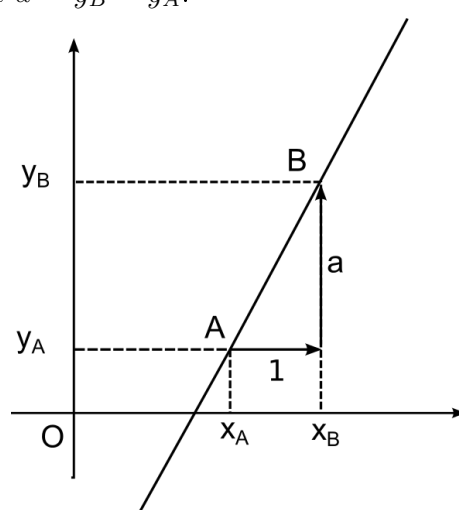
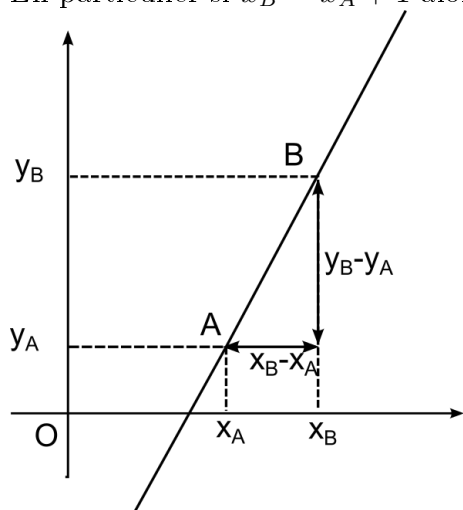
##### Proposition

La représentation graphique d'une fonction affine  $f(x) = ax + b$  est une droite d'équation  $y = ax + b$ .

##### Remarques :

- Le nombre  $a$  est appelé coefficient directeur de la droite.
- Le nombre  $b$  est l'ordonnée à l'origine car la droite passe par le point  $B(0; b)$ .
- Si  $a = 0$ , la droite a pour équation  $y = b$ , elle est parallèle à l'axe des abscisses.
- Le point  $A(x_A, y_A)$  est sur la droite d'équation  $y = ax + b$  ssi  $y_A = a \times x_A + b$
- Soient  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$  deux points de la droite d'équation  $y = ax + b$  alors  $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ .

En particulier si  $x_B = x_A + 1$  alors  $x_B - x_A = 1$  et  $a = y_B - y_A$ .



- Pour tracer une droite on pourra :
  - Soit déterminer les coordonnées de deux points de la droite en se fixant deux abscisses et en calculant les ordonnées correspondantes. On Place ces deux points dans un repère et on les relie.
  - Soit en déterminant les coordonnées d'un point de la droite. On place ce point dans un repère et on construit un deuxième point de la droite en effectuant un déplacement d'une unité horizontalement vers la droite et de  $a$  unités verticalement. On relie alors les deux points obtenus.

#### Exercice 1 :

Donner la représentation graphique des fonctions suivantes :

$$f(x) = 2x - 3, \quad g(x) = -\frac{1}{2}x + 2, \quad h(x) = -3x$$

#### Proposition

La droite passant par le point  $A(x_A; y_A)$  et de coefficient directeur  $a$  a pour équation

$$y = a(x - x_A) + y_A$$

#### Exercice 2 :

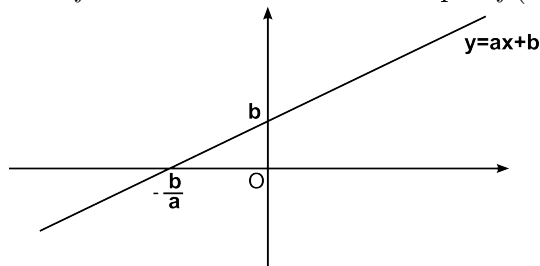
Donner l'équation de la droite de coefficient directeur 3 et passant par le point  $A(-1, -1)$  et tracer cette droite.

#### Exercice 3 :

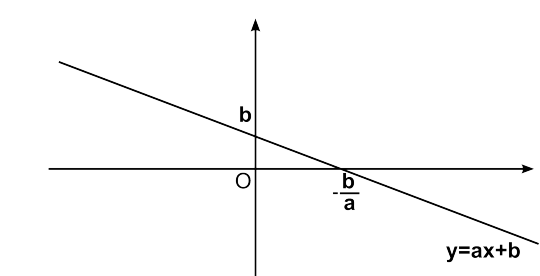
Donner l'équation de la droite passant par les points  $A(-2, 4)$  et  $B(1, 2)$

#### Proposition

Soit  $f$  la fonction affine définie par  $f(x) = ax + b$  avec  $a \neq 0$



si  $a > 0$   $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$



si  $a < 0$   $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$

$$\text{Si } a \neq 0 \quad ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

La droite d'équation  $y = ax + b$  coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées  $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ .

On en déduit le signe de la fonction :

Proposition

|                                                          |           |                |           |            |           |                |           |
|----------------------------------------------------------|-----------|----------------|-----------|------------|-----------|----------------|-----------|
| Soit $f(x) = ax + b$ une fonction affine avec $a \neq 0$ |           |                |           |            |           |                |           |
| si $a > 0$                                               |           |                |           | si $a < 0$ |           |                |           |
| $x$                                                      | $-\infty$ | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$ | $x$        | $-\infty$ | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$ |
| $ax + b$                                                 | $-$       | $0$            | $+$       | $ax + b$   | $+$       | $0$            | $-$       |

## 1.2 Application à la résolution d'inéquations

Proposition

- Un produit de facteurs  $A(x)B(x)$  est positif ou nul si et seulement si les deux facteurs  $A(x)$  et  $B(x)$  sont de même signe.  
Ce produit est négatif ou nul si et seulement si les deux facteurs  $A(x)$  et  $B(x)$  sont de signes contraires.
- Un quotient  $\frac{A(x)}{B(x)}$  est défini ssi son dénominateur  $B(x)$  est non nul.  
S'il est défini, il est positif ou nul si et seulement si les deux facteurs  $A(x)$  et  $B(x)$  sont de même signe.  
Ce quotient est négatif ou nul si et seulement si les deux facteurs  $A(x)$  et  $B(x)$  sont de signes contraires.

Remarque :

On présente les résultats sous la forme d'un tableau de signes.

Exercice 4 :

Etudier le signe des fonctions suivantes :

1.  $f(x) = (3x + 2)(2 - x)$
2.  $g(x) = -2x(x - 3)(5 - 2x)$
3.  $h(x) = \frac{2x - 5}{x^2 - 1}$

Remarque :

Lorsqu'on a affaire à une inéquation, on se ramène à un membre de droite nul et on essaye de factoriser le membre de gauche pour en étudier le signe.

Exercice 5 :

Résoudre les inéquations :

$$x^2 - 2x \leq 2x^2 + x, \quad \frac{2x - 5}{x + 2} \geq 1, \quad (x + 2)^2 - 16 < 0$$

## 2 Polynômes du second degré

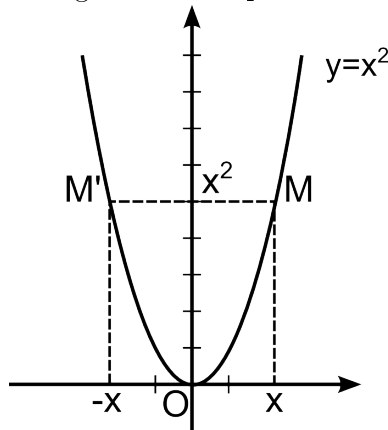
### 2.1 Fonction carrée

#### Proposition

La fonction  $f : x \mapsto x^2$  définie sur  $\mathbb{R}$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  et strictement décroissante sur l'intervalle  $] -\infty, 0]$ .

|       |           |     |           |
|-------|-----------|-----|-----------|
| $x$   | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $x^2$ | $+\infty$ | $0$ | $+\infty$ |

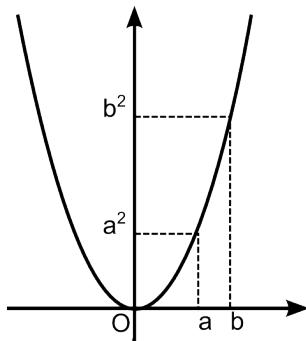
- La courbe représentative de  $f$  est appelée parabole.  
L'origine  $O$  du repère est appelé sommet de la parabole.



$(-x)^2 = x^2$  donc les points  $M(x, x^2)$  et  $M'(-x, (-x)^2)$  sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.  
Cet axe est un axe de symétrie de la parabole.

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x^2 \geq 0$

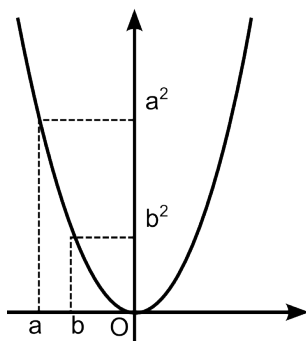
#### Proposition



pour tous nombres  $a$  et  $b$  positifs

$$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$$

deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.

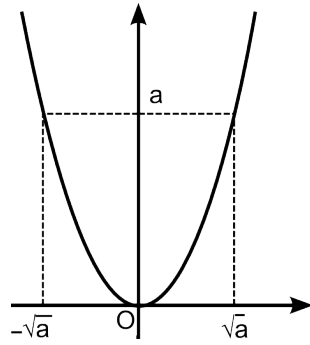


pour tous nombres  $a$  et  $b$  négatifs

$$a < b \Leftrightarrow a^2 > b^2$$

deux nombres négatifs sont rangés dans l'ordre inverse de leurs carrés.

### Proposition



pour tous nombre  $a > 0$  :

$$x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}$$

$$x^2 \leq a \Leftrightarrow -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$$

$$x^2 \geq a \Leftrightarrow x \geq \sqrt{a} \text{ ou } x \leq -\sqrt{a}$$

si  $a < 0$ , l'équation  $x^2 = a$  n'a pas de solution.

### Exercice 6 :

1. Résoudre les équations :  $x^2 - 5 = 0$ ,  $(x - 2)^2 = 4$ ,  $x^2 + 4 = 0$
2. Résoudre les inéquations :  $x^2 \geq 2$ ,  $1 \leq x^2 \leq 3$ ,  $(x + 1)^2 \leq 2$

## 2.2 Fonctions polynômes du second degré

### 2.2.1 Définition, courbe et sens de variation

#### Définition

On appelle polynôme du second degré, ou trinôme, toute fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont trois réels donnés et  $a \neq 0$ .

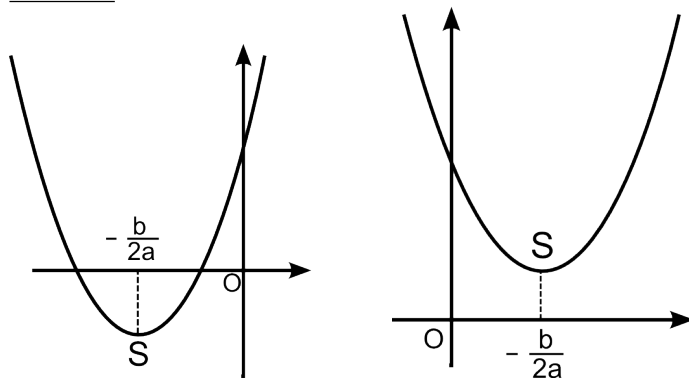
#### Exemples :

1.  $P(x) = -3x^2 + x$  est un trinôme avec  $a = -3$ ,  $b = 1$  et  $c = 0$
2.  $Q(x) = 3(x - 2)(x - 3)$  est un trinôme car en développant  $Q(x) = 3x^2 - 15x + 18$ .
3.  $R(x) = x^2$  est la plus simple fonction trinôme ( $a = 1$ ,  $b = 0$  et  $c = 0$ )

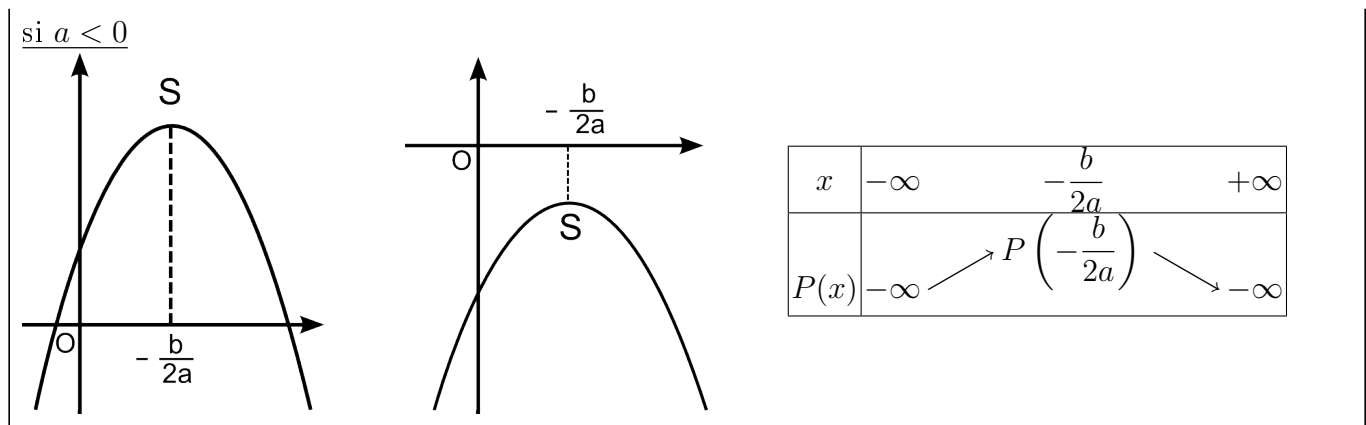
#### Proposition

- La courbe représentative de la fonction trinôme  $P(x) = ax^2 + bx + c$  est une parabole  $\mathcal{P}$  ayant pour sommet le point  $S\left(-\frac{b}{2a}; P\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$
- Le sens de variation de  $\mathcal{P}$  dépend du signe de  $a$  :

si  $a > 0$



|        |           |                               |           |
|--------|-----------|-------------------------------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $-\frac{b}{2a}$               | $+\infty$ |
| $P(x)$ | $+\infty$ | $P\left(-\frac{b}{2a}\right)$ | $+\infty$ |



### Exercice 7 :

Donner le tableau de variation des fonctions suivantes :

1.  $P(x) = -2x^2 + 3x - 1$
2.  $Q(x) = x^2 + x + 1$

## 2.2.2 Racines et factorisation des polynômes du second degré

### Définition

Soit  $P(x) = ax^2 + bx + c$  un polynôme de degré deux.  
On appelle racine de  $P$  toute solution de l'équation

$$P(x) = 0$$

ie tout réel  $\alpha$  tel que  $P(\alpha) = 0$

- Un exemple préliminaire :  
soit le trinôme défini sur  $\mathbb{R}$  par

$$P(x) = 3x^2 + 9x + 6$$

Effectuons la suite d'opérations suivantes :

$$\begin{aligned}
 P(x) &= 3(x^2 + 3x + 2) && \text{factoriser par } 3 \neq 0 \\
 &= 3\left(x^2 + 2 \times \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2\right) && \text{recherche d'une identité remarquable} \\
 &= 3\left(\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) && (x + m)^2 = x^2 + 2mx + m^2 \\
 &= 3\left(\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) && \text{forme canonique ie de la forme } a[(x + m)^2 - d] \\
 &= 3\left(x + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) && \text{on reconnaît une différence de deux carrés} \\
 &= 3(x + 2)(x + 1) && \text{on factorise } a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)
 \end{aligned}$$

On a donc

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = -1$$

Les racines de  $P$  sont  $x_1 = -2$  et  $x_2 = -1$

- Cas général :

Soit le trinôme  $P(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a \neq 0$ .

Transformons l'écriture de  $P$

$$\begin{aligned}
 P(x) &= a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) && \text{factoriser par } a \neq 0 \\
 &= a \left( x^2 + 2 \times \frac{b}{2a}x + \left( \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right) && \text{recherche d'une identité remarquable} \\
 &= a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) && \text{forme canonique}
 \end{aligned}$$

### Définition

On appelle discriminant du trinôme  $P(x) = ax^2 + bx + c$  le réel noté  $\Delta$  ("delta") défini par :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

### Exemple :

Si  $P(x) = 3x^2 + 9x + 6$

le discriminant vaut  $\Delta = 9^2 - 4 \times 3 \times 6 = 81 - 72 = 9$

- La forme canonique s'écrit donc

$$P(x) = a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right)$$

La factorisation éventuelle de  $P$  dépend du signe de  $\frac{\Delta}{4a^2}$ .

- Si  $\Delta > 0$

alors  $\frac{\Delta}{4a^2} = \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2$ .

Le trinôme s'écrit :

$$\begin{aligned}
 P(x) &= a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right) && \text{on reconnaît la différence de deux carrés} \\
 &= a \left( x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left( x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \\
 &= a \left( x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left( x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right)
 \end{aligned}$$

Le trinôme a deux racines distinctes qui sont :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si  $\Delta = 0$

le trinôme s'écrit

$$P(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

et admet  $-\frac{b}{2a}$  pour unique racine.

- Si  $\Delta < 0$   
alors  $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$  et  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$  n'a pas de solution.  
Le polynôme n'a pas de racines.

#### Proposition

Soit  $P(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) un trinôme et  $\Delta = b^2 - 4ac$  sont discriminant.

- Si  $\Delta < 0$

$P$  n'a pas de racine et n'a pas de facteur du premier degré.

- Si  $\Delta = 0$

$P$  admet une racine  $x_0 = -\frac{b}{2a}$

$$P(x) = a(x - x_0)^2$$

- Si  $\Delta > 0$

$P$  admet deux racines distinctes  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

#### Exemple :

On reprend  $P(x) = 3x^2 + 9x + 6$

$\Delta = 9 > 0$  donc  $P$  admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-9 + \sqrt{9}}{2 \times 3} = \frac{-9 + 3}{6} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-9 - \sqrt{9}}{2 \times 3} = \frac{-9 - 3}{6} = -2$$

#### Application

Pour résoudre l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  avec  $a \neq 0$  ie trouver les racines du polynôme

$P(x) = ax^2 + bx + c$

- on effectue les factorisations immédiates
- sinon on calcule le discriminant  $\Delta$  et on applique la propriété précédente.

#### Exercice 8 :

Résoudre les équations suivantes :

$$a) 0.6x - 2x^2 = 0 \quad b) 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$c) -\frac{1}{2}x^2 + x - 1 = 0 \quad d) -x^2 + 4 = 0$$

#### Exercice 9 :

Factoriser les trinômes

$$P(x) = -2x^2 + x + 3 \quad \text{et} \quad Q(x) = x^2 - x - 2$$

#### Proposition

Soit  $P(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) un trinôme admettant deux racines distinctes  $x_1$  et  $x_2$ . alors

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

### Demonstration

Puisque le trinôme admet deux racines distinctes

$$\begin{aligned}
P(x) &= a(x - x_1)(x - x_2) \\
&= a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) \\
&= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2
\end{aligned}$$

Par identification des coefficients on a :

$$-a(x_1 + x_2) = b \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$ax_1x_2 = c \Leftrightarrow x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

### Application

Cette proposition permet de calculer la deuxième racine d'un trinôme dont on connaît la première. On l'utilise en particulier si l'on remarque que 1 ou -1 est racine de  $P$ .

Si  $x_1 = 1$  alors la deuxième racine de  $P$  est  $x_2 = \frac{c}{a}$

Si  $x_1 = -1$  alors la deuxième racine de  $P$  est  $x_2 = -\frac{c}{a}$ .

### Exercice 10 :

Déterminer les racines des trinômes suivants sans calcul de discriminant :

$$P(x) = 3x^2 + 2x - 5 \quad Q(x) = -2x^2 + 4x + 6$$

### 2.2.3 Signe d'un polynôme du second degré

Soit  $P(x) = ax^2 + bx + c$  un trinôme et  $\Delta = b^2 - 4ac$  son discriminant.

- Si  $\Delta > 0$

$P$  admet deux racines distinctes  $x_1$  et  $x_2$  (on suppose  $x_1 < x_2$ ) et  $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

| $x$                  | $-\infty$ | $x_1$ | $x_2$ | $+\infty$ |
|----------------------|-----------|-------|-------|-----------|
| $x - x_1$            | -         | 0     | +     | +         |
| $x - x_2$            | -         | -     | 0     | +         |
| $(x - x_1)(x - x_2)$ | +         | 0     | -     | +         |

d'où le signe de  $P(x)$  :

| si $a > 0$ |           |       |       |           | si $a < 0$ |           |       |       |           |
|------------|-----------|-------|-------|-----------|------------|-----------|-------|-------|-----------|
| $x$        | $-\infty$ | $x_1$ | $x_2$ | $+\infty$ | $x$        | $-\infty$ | $x_1$ | $x_2$ | $+\infty$ |
| $P(x)$     | +         | 0     | -     | +         | $P(x)$     | -         | 0     | +     | -         |

- Si  $\Delta = 0$

$P$  admet une unique racine  $x_0$  et  $P(x) = a(x - x_0)^2$

Comme  $(x - x_0)^2 \geq 0$ ,  $P(x)$  est toujours du signe de  $a$ .

- Si  $\Delta < 0$

$$P(x) = a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) \text{ avec } -\frac{\Delta}{4a^2} > 0.$$

donc  $\left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) > 0$  et  $P(x)$  est toujours du signe de  $a$ .

## Proposition

Soit  $P(x) = ax^2 + bx + c$  un trinôme.

Alors  $P(x)$  est du signe du coefficient de  $x^2$  (ie de  $a$ ) sauf entre les racines, s'il y en a.

## Exercice 11 :

Donner le signe sur  $\mathbb{R}$  des fonctions suivantes :

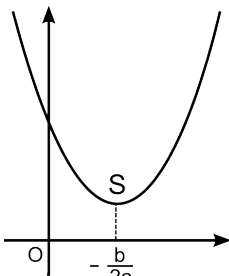
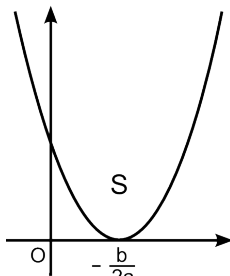
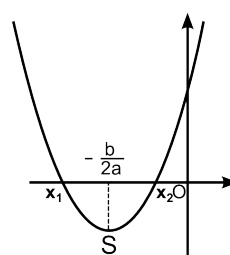
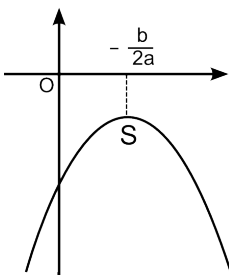
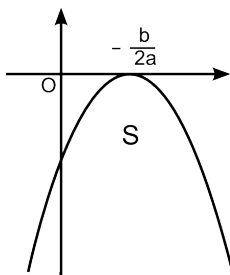
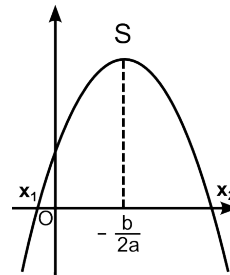
$$P(x) = 2x^2 + 4x + 1 \quad Q(x) = x^2 + x - 1 \quad R(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{25}{2}$$

## Exercice 12 :

Résoudre l'inéquation

$$\frac{x+1}{x-2} \leq \frac{x+3}{2-4x}$$

On peut résumer les résultats précédents dans le tableau suivant :

| $\Delta = b^2 - 4ac$          | $\Delta < 0$                                                                        | $\Delta = 0$                                                                        | $\Delta > 0$                                                                                              |
|-------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| racines de<br>$ax^2 + bx + c$ | pas de racine                                                                       | une racine double<br>$x_0 = -\frac{b}{2a}$                                          | deux racines distinctes<br>$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ |
| $a > 0$                       |   |   |                       |
| signe de<br>$ax^2 + bx + c$   | $\begin{array}{c c} x & \\ \hline P(x) & + \end{array}$                             | $\begin{array}{c c} x & -b/2a \\ \hline P(x) & + \quad 0 \quad + \end{array}$       | $\begin{array}{c c} x & x_1 \quad x_2 \\ \hline P(x) & + \quad 0 \quad - \quad 0 \quad + \end{array}$     |
| $a < 0$                       |  |  |                      |
| signe de<br>$ax^2 + bx + c$   | $\begin{array}{c c} x & \\ \hline P(x) & - \end{array}$                             | $\begin{array}{c c} x & -b/2a \\ \hline P(x) & - \quad 0 \quad - \end{array}$       | $\begin{array}{c c} x & x_1 \quad x_2 \\ \hline P(x) & - \quad 0 \quad + \quad 0 \quad - \end{array}$     |

## 3 Fonctions polynômes de degré quelconque

### 3.1 Définition, degré

#### Définition

Une fonction  $P$ , définie sur  $\mathbb{R}$ , est une fonction polynôme lorsqu'il existe un entier naturel  $n$  et des réels  $a_0, a_1, \dots, a_n$  tels que pour tout réel  $x$  :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

#### Exemples :

1.  $P(x) = -5x^4 + x + 0.7$  est un polynôme avec  $a_4 = -5$ ,  $a_3 = a_2 = 0$ ,  $a_1 = 1$  et  $a_0 = 0.7$ .
2. si  $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$  on obtient la fonction nulle.
3. Les fonctions affines et les fonctions constantes sont des fonctions polynômes.

#### Proposition et définition

- Toute fonction polynôme différente du polynôme nul s'écrit de manière unique sous la forme

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{avec} \quad a_n \neq 0$$

- Cette écriture est appelée forme développée, ordonnée réduite.
- Les réels  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sont les coefficients du polynôme et  $n$  son degré.
- Le terme  $a_i x^i$  est le terme de degré  $i$  du polynôme.

#### Exemples :

1.  $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 6x - 1$  est un polynôme de degré 3.
2.  $Q(x) = (x+1)(3x-10)(4-2x)$  a pour forme développée ordonnée réduite

$$Q(x) = -6x^3 + 26x^2 - 8x - 40$$

$Q(x)$  est un polynôme de degré 3. Son terme de degré 3 est  $-6x^3$ .

3. Les fonctions affines  $f(x) = ax + b$  avec ( $a \neq 0$ ) sont les polynômes de degré 1.
4. Les fonctions constantes  $f(x) = c$  avec ( $c \neq 0$ ) sont les polynômes de degré 0.

#### Remarques

- On lit le degré d'un polynôme sur sa forme développée, réduite et ordonnée.
- Si  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes de degré  $n$  et  $m$  respectivement  
 $P + Q$  est un polynôme de degré inférieur ou égal au maximum de  $n$  et  $m$   
 $P \times Q$  est un polynôme de degré  $n + m$ .

#### Exercice 13 :

Donner le degré des fonctions polynômes suivantes :

$$P(x) = (x^2 - 3)^2 - (x^2 + x)^2 \quad Q(x) = (x^2 + 1)(5 - 2x^3)$$

- Les deux polynômes  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  et  $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$  sont égaux si et seulement si

$$n = m \text{ et pour tout } i \in \{0, 1, \dots, n\} \quad b_i = a_i$$

#### Exercice 14 :

On considère la fonction polynôme  $P(x) = 6x^3 - x^2 + 1$   
Déterminer trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que

$$P(x) = (2x + 1)(ax^2 + bx + c)$$

### 3.2 Racines et factorisation

#### Définition

On appelle racine d'un polynôme  $P$  tout nombre réel  $a$  tel que  $P(a) = 0$ .  
Autrement dit, une racine de  $P$  est une solution de l'équation  $P(x) = 0$  dans  $\mathbb{R}$

#### Exemples :

1. Soit  $P(x) = ax + b$  (avec  $a \neq 0$ ) un polynôme de degré 1.  
 $P$  a pour unique racine  $-\frac{b}{a}$
2. Nous avons vu dans le paragraphe précédent comment calculer les racines des polynômes de degré 2.
3. Soit  $P(x) = 3x^4 - 2x - 5$   
 $P(-1) = 3(-1)^4 - 2(-1) - 5 = 3 + 2 - 5 = 0$  donc -1 est racine de  $P$ .
4. Le polynôme  $P(x) = (x + 1)(3x + 10)(4 - 2x)$  a pour racines  $-1$ ,  $-\frac{10}{3}$  et 2 et ce sont les seules.
5. Le polynôme  $P(x) = x^2 + 3$  n'a pas de racine.

#### Proposition

Soit  $P$  un polynôme et  $a$  une racine de  $P$ .  
Alors  $P$  est factorisable par  $(x - a)$ , c'est à dire il existe un polynôme  $Q$  tel que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x - a)Q(x)$$

#### Remarques :

- Si  $P$  est un polynôme de degré  $n$ ,  $Q$  est alors un polynôme de degré  $n - 1$ .
- Les racines de  $P$  sont les réels qui annulent les facteurs de la factorisation de  $P$ .
- On considère le polynôme  $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 13x - 12$   
 $P(3) = 2 \times 27 - 9 \times 9 + 13 \times 3 - 12 = 54 - 81 + 39 - 12 = 0$   
3 est donc une racine de  $P$  et on peut factoriser  $P$  par  $(x - 3)$ .  
Il faut donc déterminer un polynôme  $Q$  tel que

$$P(x) = (x - 3)Q(x)$$

Pour cela on peut :

- utiliser la méthode des coefficients indéterminés :  
comme  $P$  est de degré 3 le polynôme  $Q$  est de degré 2. On cherche donc trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $Q(x) = ax^2 + bx + c$  ie

$$P(x) = (x - 3)(ax^2 + bx + c)$$

On développe le membre de droite de l'égalité précédente et on identifie les coefficients des termes de même degré de chacun des deux polynômes. On obtient alors un système que l'on résout.

- utiliser la division euclidienne de  $P(x)$  par  $(x - 3)$

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 - 9x^2 + 13x - 12 & x - 3 \\
 \hline
 -(2x^3 - 6x^2) & \\
 \hline
 -3x^2 + 13x - 12 & \\
 -(-3x^2 + 9x) & \\
 \hline
 4x - 12 & \\
 -(4x - 12) & \\
 \hline
 0 & 
 \end{array}$$

Exercice 15 :

Soit  $P(x) = -2x^3 + 7x^2 - 5x + 1$

Montrer que  $\frac{1}{2}$  est racine de  $P$ .

Déterminer un polynôme  $Q$  tel que

$$P(x) = (2x - 1)Q(x)$$

Remarque :

Pour effectuer la division euclidienne du polynôme  $P$  par le polynôme  $Q$  il faut que les deux polynômes  $P$  et  $Q$  soient écrits sous forme développée, ordonnée réduite.

Exercice 16 :

Soit  $P(x) = -x^4 - x^3 + 3x^2 + x - 2$

Effectuer la division euclidienne de  $P$  par  $(x + 1)(x + 2)$

Proposition

Soit  $P$  un polynôme et  $a_1, a_2, \dots, a_p, p$  racines distinctes de  $P$ .

Alors  $P$  est factorisable par  $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_p)$  ie il existe un polynôme  $Q$  tel que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_p)Q(x)$$

Remarques :

- Si  $P$  est de degré  $n$  alors  $Q$  est de degré  $n - p$
- Un polynôme de degré  $n$  admet au plus  $n$  racines.
- Soit  $P$  un polynôme de degré  $n$  admettant  $n$  racines distinctes  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Alors pour tout réel  $x$

$$P(x) = a(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

où  $a$  est le coefficient du terme de degré  $n$  de  $P$ .

Exercice 17 :

Soit  $P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2x - 4$

Calculer  $P(1)$ ,  $P(-1)$  et  $P(2)$ .

En déduire la factorisation de  $P$ .

# Exercices : Polynômes à coefficients réel

1 )

1. Dans un repère orthonormé construire les droites ci-dessous :

$$(\mathcal{D}_1) \text{ d'équation } y = 3x + 1 \quad (\mathcal{D}_2) \text{ d'équation } y = -4x - 1 \quad (\mathcal{D}_3) \text{ d'équation } y = \frac{1}{2}x + 2$$

2. A l'aide d'un repère orthonormé, répondre aux questions suivantes :

- (a) Construire la droite  $(\mathcal{D}_1)$  passant par le point  $A(1; 2)$  et de coefficient directeur 4.
  - (b) Construire la droite  $(\mathcal{D}_2)$  passant par le point  $B(0; 1)$  et le point  $C(2; 9)$ .
  - (c) Déterminer par le calcul l'équation des deux droites précédentes.
- 

2 ) Déterminer le signe des fonctions suivantes :

- 1.  $f(x) = \frac{x+3}{4-x^2}$ , définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$
  - 2.  $g(x) = x^2 - 3x$ , définie sur  $\mathbb{R}$
  - 3.  $h(x) = (x^2 + 2)(2x - 1)(3 - 3x)$ , définie sur  $\mathbb{R}$
  - 4.  $k(x) = (x^2 - 1) + (x - 1)(x + 2)$ , définie sur  $\mathbb{R}$
- 

3 ) Résoudre les inéquations suivantes :

- 1.  $\frac{1}{x} < \frac{1}{x+2}$
  - 2.  $\frac{2}{x+1} \leq 1$
  - 3.  $\frac{x(2x-1)(x^2-4)}{(x+1)(x^2+1)} \leq 0$
- 

4 ) Résoudre les équations suivantes :

- 1.  $3x^2 - 8x - 3 = 0$
  - 2.  $x^2 + x + 2 = 0$
  - 3.  $-2x^2 - 3x + 2 = 0$
- 

5 ) Etudier le signe des expressions suivantes :

- 1.  $A(x) = -3x^2 + 3x + 6$
  - 2.  $B(x) = 4x^2 + 12x + 9$
  - 3.  $C(x) = -2x^2 + \frac{2}{3}x - 5$
- 

6 ) Résoudre l'inéquation suivante :

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2} \leq 2$$

**7 )** Soit  $f$  la fonction trinôme définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3$$

On appelle  $\mathcal{P}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé.

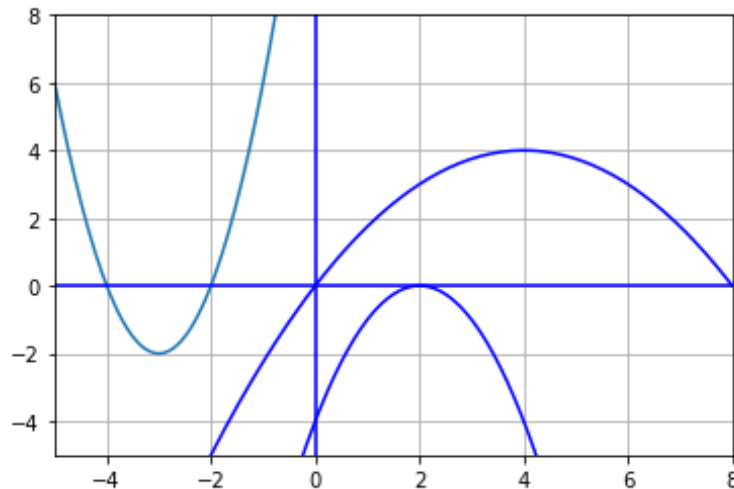
1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de  $\mathcal{P}$  et de l'axe des abscisses.
  2. Déterminer le signe de  $f(x)$ .
  3. Préciser les coordonnées du sommet de  $\mathcal{P}$  ainsi que le tableau de variation de  $f$ .
  4. Donner l'allure de  $\mathcal{P}$ .
- 

**8 )** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = (x - 3)^2 - (3x - 2)^2$$

1. Déterminer la forme développée et réduite de  $f(x)$ .
  2. Déterminer la forme factorisée de  $f(x)$ .
  3. Répondre aux questions suivantes en choisissant la forme de  $f(x)$  qui paraît la plus adéquate pour résoudre le problème posé.
    - (a) Calculer les images par  $f$  de  $0$  ;  $5$  ;  $\frac{3}{8}$  et  $1 + \sqrt{2}$ .
    - (b) Trouver l'extremum de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
    - (c) Résoudre l'équation  $f(x) = 0$
    - (d) Résoudre l'équation  $f(x) = 5$ .
    - (e) Résoudre l'inéquation  $f(x) \leq 0$ .
    - (f) Tracer l'allure de la courbe représentative de  $f$ .
- 

**9 )** A l'aide du graphique ci dessous, déterminer les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$ .



**10 )** On considère le trinôme suivant :

$$P(x) = x^2 - (m + 4)x + 1$$

1. Déterminer les valeurs de  $m$  pour lesquelles  $P$  admet deux racines distinctes.
2. Déterminer les valeurs de  $m$  pour lesquelles  $P$  admet une racine double.
3. Déterminer les valeurs de  $m$  pour lesquelles  $P$  n'admet pas de racine.

**11 )** Dans chacun des cas, déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que les fonctions  $f$  et  $g$  soient égales.

1.  $f(x) = 2x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x$  et  $g(x) = (x^2 + x)(ax^2 + bx + c)$ .

2.  $f(x) = \frac{x+7}{x^2+2x-3}$  et  $g(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3}$ .

---

**12 )** Soit  $P$  le polynôme défini par  $P(x) = -x^3 + 6x^2 - 5x - 12$

1. Montrer que 3 est racine de  $P$ .
  2. En déduire une factorisation de  $P$  par  $(x - 3)$ .
  3. En déduire les solutions de l'équation :  $-x^3 + 6x^2 - 5x - 12 = 0$
  4. Terminer la factorisation de  $P$ .
  5. Déterminer le signe de  $P(x)$  en fonction de  $x$ .
- 

**13 )** On considère le polynôme  $P(x) = 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 6x - 12$

1. Montrer que 1 et -2 sont racines de  $P$ .
2. (a) Justifier qu'il existe un polynôme  $Q$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$P(x) = (x - 1)(x + 2)Q(x)$$

(b) Quel est le degré de  $Q$  ?

(c) Déterminer le polynôme  $Q$ .

3. Résoudre l'équation  $P(x) = 0$
  4. Déterminer le signe de  $P(x)$  sur  $\mathbb{R}$  en fonction des valeurs de  $x$ .
- 

**14 )**

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $4x^4 - 9x^2 + 2 = 0$  en utilisant l'inconnue auxiliaire  $X = x^2$
  2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $2x^4 - 7x^2 + 6 = 0$
- 

**15 )** On considère l'équation :

$$(*) \quad x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 2x + 1 = 0$$

1. Vérifier que 0 n'est pas solution de  $(*)$ .
2. Montrer que l'équation  $(*)$  est équivalente à

$$(**) \quad \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 8 = 0$$

3. Résoudre l'équation

$$X^2 - 2X - 8 = 0$$

4. En utilisant l'inconnue auxiliaire  $X = x + \frac{1}{x}$ , montrer que  $(**)$  est équivalente à

$$\left\{ \begin{array}{l} x + \frac{1}{x} = -2 \\ \text{ou } x + \frac{1}{x} = 4 \end{array} \right. \quad \text{puis à} \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 2x + 1 = 0 \\ \text{ou } x^2 - 4x + 1 = 0 \end{array} \right.$$

5. Donner finalement les solutions de l'équation  $(*)$ .