

Intégration sur un segment : Propriétés de l'intégrale

1 Intégration par parties

Théorème

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a, b]$ admettant des dérivées u' et v' continues. Alors

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Démonstration :

La fonction uv est dérivable sur $[a, b]$ et $(uv)' = u'v + uv'$. Les fonctions uv , $u'v$ et uv' sont continues sur $[a, b]$ donc

$$\begin{aligned} \int_a^b (uv)'(x)dx &= \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx \\ &= \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx \\ &= [u(x)v(x)]_a^b \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Remarque :

La formule d'intégration par parties permet principalement :

- de calculer certaines intégrales dont on ignore une primitive "à vue"
- de déterminer certaines nouvelles primitives
- de déterminer des relations de récurrences.

Remarque :

- Soit P une fonction polynôme, λ , a et b trois réels ($\lambda \neq 0$).
Pour calculer l'intégrale

$$\int_a^b P(x)e^{\lambda x}dx$$

on effectue une intégration par parties en posant :

$$u'(x) = e^{\lambda x} \text{ donc } u(x) = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x} \text{ et } v(x) = P(x).$$

- Soit P une fonction polynôme, a et b deux réels strictements positifs.
Pour calculer l'intégrale

$$\int_a^b P(x)\ln(x)dx$$

on effectue une intégration par parties en posant :

$$u'(x) = P(x) \text{ et } v(x) = \ln(x) \text{ donc } v'(x) = \frac{1}{x}$$

Exercice 1 :

À l'aide d'une intégration par parties calculer les intégrales :

$$I = \int_1^e x \ln(x) dx \quad ; \quad J = \int_0^1 x e^x dx$$

Exercice 2 :

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

$$I = \int_1^e (x^2 + x + 1) \ln(x) dx \quad J = \int_0^2 (3x - 1) e^{-x} dx$$

Exercice 3 :

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_1^e x (\ln(x))^n dx$

1. Calculer I_0
2. À l'aide d'une intégration par parties exprimer I_{n+1} en fonction de I_n
3. Calculer alors I_1 et I_2

Exemple de calcul de primitive par intégration par parties :

Remarque :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel de I .

La fonction définie sur I par : $\forall x \in I, \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f sur I nulle en a .

On a donc en particulier F dérivable sur I avec $\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x)$.

Pour calculer une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction logarithme népérien on introduit la fonction F définie par :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \int_1^x \ln(t) dt$$

Calculons l'intégrale précédente en effectuant une intégration par parties.

On pose $u'(t) = 1$ donc $u(t) = t$ et $v(t) = \ln(t)$ donc $v'(t) = \frac{1}{t}$.

Les quatre fonctions u , u' , v et v' sont continues sur $]0, +\infty[$ donc la formule d'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} F(x) &= [u(t)v(t)]_1^x - \int_1^x u(t)v'(t) dt = [t \ln(t)]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} dt \\ &= x \ln(x) - \int_1^x 1 dt = x \ln(x) - [t]_1^x = x \ln(x) - x + 1 \end{aligned}$$

On a alors

$$\forall x > 0, \quad F'(x) = \ln x$$

On a donc le résultat suivant :

Une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $f(x) = \ln(x)$ est la fonction

$$F(x) = x \ln(x) - x$$

2 Propriétés de l'intégrale

2.1 Linéarité de l'intégrale

Proposition

Soient f et g deux applications continues sur $[a, b]$ et soient (λ, μ) deux réels. Alors

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

Exercice 4 :

Pour tout entier $n \geq 1$ on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1 + 2x + 3x^2} dx.$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$I_n + 2I_{n+1} + 3I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$$

Remarque

La linéarité reste vraie si $a > b$. On a donc le résultat suivant :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f et g deux applications continues sur I et λ et μ deux réels,

$$\forall (a, b) \in I^2, \int_a^b (\lambda f + \mu g)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

2.2 Positivité de l'intégrale - comparaison d'intégrales

Proposition

- Positivité de l'intégrale :
soit f une fonction continue sur $[a, b]$, ($a < b$).
Si f est positive sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

- Croissance de l'intégrale :
soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, ($a < b$)
Si pour tout $x \in [a, b]$ $f(x) \leq g(x)$ alors

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Remarques

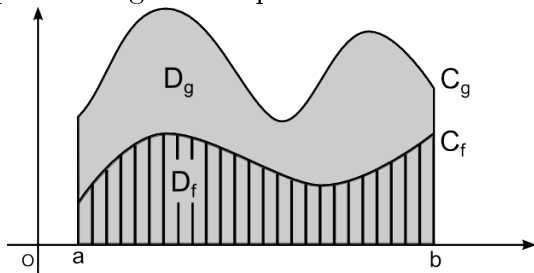
- Attention à l'ordre des bornes :

si $b < a$ et si f est positive sur $[b, a]$ alors $\int_a^b f(x) dx \leq 0$.

En effet d'après la proposition précédente $\int_b^a f(x) dx \geq 0$

donc $-\int_a^b f(x) dx \geq 0$ et $\int_a^b f(x) dx \leq 0$.

- Interprétation géométrique :



Si $\forall x \in [a, b], \quad 0 \leq f(x) \leq g(x)$

$$\mathcal{A}(D_f) \leq \mathcal{A}(D_g)$$

$$\text{donc } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

- Dans un exercice, toute question faisant intervenir des inégalités et des intégrales se résoudra à l'aide de la propriété précédente.

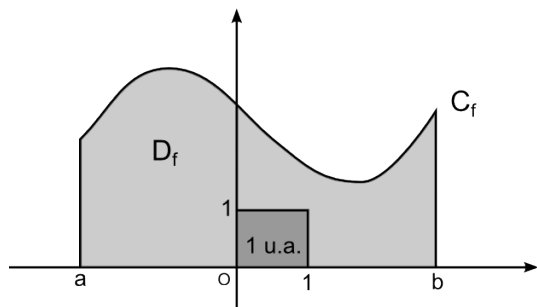
Exercice 5 :

Pour tout entier $n \geq 1$ on pose

$$J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx.$$

1. Calculer J_1 .
2. Montrer que la suite $(J_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
3. Montrer que $\forall x \in [0, 1], \quad 0 \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$.
4. En déduire que $\forall n \geq 1, \quad 0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$.
5. Etudier la convergence de la suite $(J_n)_{n \geq 1}$.

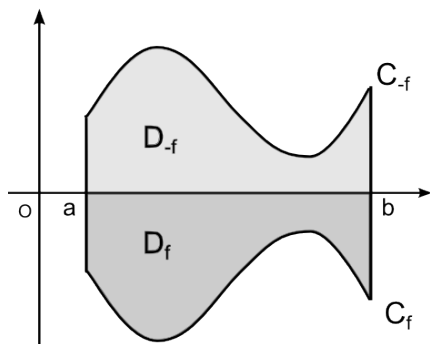
3 Aire d'un domaine



On rappelle que si f est une fonction continue et positive sur $[a, b]$ $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par :

- la courbe C_f
- l'axe des abscisses
- les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$

- Si f est négative sur $[a, b]$ alors $-f$ est positive sur $[a, b]$.



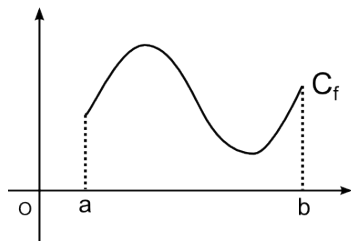
Soit D_f le domaine du plan délimité par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

L'aire du domaine D_f vaut :

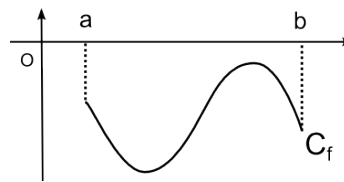
$$\mathcal{A}(D_f) = \mathcal{A}(D_{-f}) = \int_a^b (-f(x))dx = - \int_a^b f(x)dx$$

$$\text{donc } \int_a^b f(x)dx = -\mathcal{A}(D_f)$$

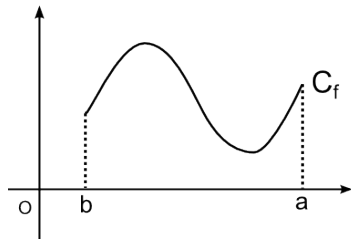
- On en déduit le signe de $\int_a^b f(x)dx$ suivant le signe de f et les positions relatives de a et b :



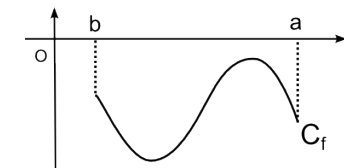
$$\int_a^b f(x)dx > 0$$



$$\int_a^b f(x)dx < 0$$

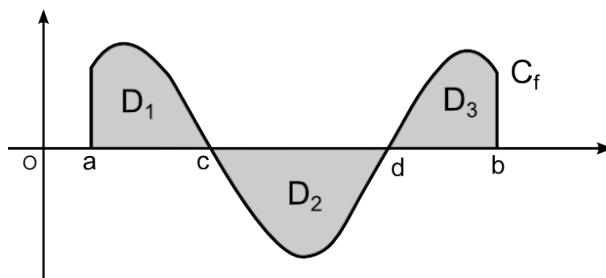


$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx < 0$$



$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx > 0$$

- Si f change de signe sur $[a, b]$:



$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx \\ &= \mathcal{A}(D_1) - \mathcal{A}(D_2) + \mathcal{A}(D_3) \end{aligned}$$

$\int_a^b f(x)dx$ est la somme algébrique des aires des domaines D_1 , D_2 et D_3 , les aires des domaines situés sous l'axe des abscisses étant comptées négativement.

- Application aux fonctions paires et impaires :

Proposition

Soit I un intervalle centré en 0 et f une fonction continue sur I .

- Si f est paire sur I alors :

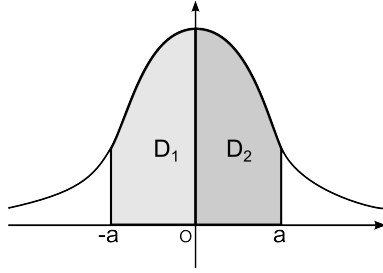
$$\forall a \in I, a > 0, \quad \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

- Si f est impaire sur I alors :

$$\forall a \in I, a > 0, \quad \int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

Démonstration

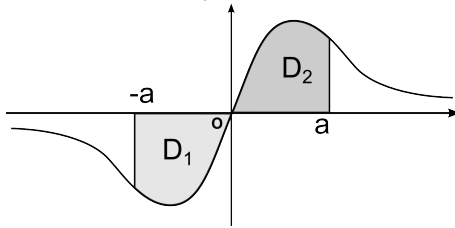
- Si f est paire $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



$$\mathcal{A}(D_1) = \mathcal{A}(D_2)$$

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \mathcal{A}(D_1) + \mathcal{A}(D_2) = 2\mathcal{A}(D_2) = 2 \int_0^a f(x)dx$$

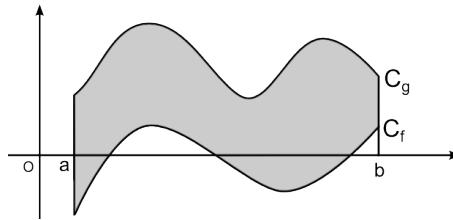
- Si f est impaire $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.



$$\mathcal{A}(D_1) = \mathcal{A}(D_2)$$

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = -\mathcal{A}(D_1) + \mathcal{A}(D_2) = 0$$

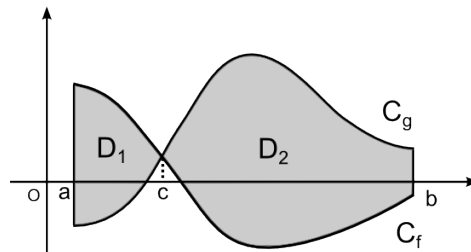
- Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que : $\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)$



l'aire du domaine $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } a \leq x \leq b \text{ et } f(x) \leq y \leq g(x)\}$ vaut $\int_a^b (g(x) - f(x))dx$

Comme $f(x) \leq g(x)$ alors $g(x) - f(x) \geq 0$ sur $[a, b]$ et $\int_a^b (g(x) - f(x))dx \geq 0$

- Lorsque $g - f$ n'est pas de signe constant sur $[a, b]$ pour calculer l'aire du domaine délimité par les deux courbes on utilise la relation de Chasles :



l'aire du domaine du domaine grisé est égale à

$$\mathcal{A}(D_1) + \mathcal{A}(D_2) = \int_a^c (f(x) - g(x))dx + \int_c^b (g(x) - f(x))dx$$

QCM : ai-je compris le chapitre ?

Primitives (rappels de première année)

1. Dire que F est une primitive de f sur un intervalle I signifie que :

- a. F est dérivable sur I et $F' = f$ sur I b. f est dérivable sur I et $f' = F$ sur I

- c. $F(x) = \int_a^b f(x)dx$ d. F et f ont les mêmes variations sur I

2. Une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est :

- a. $-\frac{1}{x^2}$ b. $\ln(x)$ c. $2\sqrt{x}$ d. $\frac{1}{2x^2}$

3. Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle I :

- a. sont égales b. diffèrent d'une constante
c. sont proportionnelles d. prennent la même valeur en 0

4. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto e^{2x+3}$ est :

- a. $2e^{2x+3}$ b. e^{2x+3} c. $\frac{1}{2}e^{2x+3}$ d. $\frac{1}{2x+3}e^{2x+3}$

5. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$ est :

- a. $\ln(x^2+1)$ b. $\frac{2}{x^2+1}$ c. $\frac{1}{x^2+1}$ d. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

6. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ est :

- a. $\ln((x^2+1)^2)$ b. $-\frac{1}{x^2+1}$ c. $\frac{1}{x^2+1}$ d. $-\frac{2}{(x^2+1)^3}$

Calcul d'une intégrale (rappels de première année)

7. Soit F une primitive de f sur $[a, b]$. Alors $\int_a^b f(x)dx$ est égal à :

- a. $F(a) - F(b)$ b. $F(b) - F(a)$ c. $F(b) + F(a)$ d. $f(b) - f(a)$

8. $\int_a^a f(x)dx$ est égal à :

- a. 0 b. $f(a)$ c. 1 d. $F(a)$

9. Soit c une constante réelle. Alors $\int_a^b c dx$ est égal à :

- a. c b. cb c. $c(b-a)$ d. $\frac{c}{2}(b^2 - a^2)$

10. $\int_0^2 e^{2x+1} dx$ est égal à :

a. $\frac{e^5 - e}{2}$

b. $e^5 - e$

c. $2(e^5 - e)$

d. $\frac{e^5}{2}$

11. $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$ est égal à :

a. $\ln(e + 1)$

b. $\ln\left(\frac{e + 1}{2}\right)$

c. $\frac{e + 1}{2}$

d. $\ln(e) - \ln(2)$

12. Pour $n \geq 2$, la somme $S_n = \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$ est égale à :

a. $\ln(n)$

b. $\ln(n) - 1$

c. $\ln(n - 1)$

d. $\sum_{k=2}^n \ln(k)$

Intégration par parties

13. Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a, b]$, de dérivées continues. Alors $\int_a^b u'(x)v(x)dx$ est égal à :

a. $[u(x)v(x)]_a^b + \int_a^b u(x)v'(x)dx$

b. $[u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$

c. $[u'(x)v'(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v(x)dx$

d. $\int_a^b u(x)v'(x)dx - [u(x)v(x)]_a^b$

14. Pour calculer $\int_1^e x^3 \ln(x) dx$ par parties, le choix pertinent est :

a. $u'(x) = \ln(x)$ et $v(x) = x^3$

b. $u'(x) = 1$ et $v(x) = x^3 \ln(x)$

c. $u'(x) = x^3$ et $v(x) = \ln(x)$

d. $u'(x) = x^3 \ln(x)$ et $v(x) = 1$

15. $\int_0^1 xe^{-x} dx$ est égal à :

a. $\frac{1}{e}$

b. $1 - \frac{1}{e}$

c. $\frac{2}{e} - 1$

d. $1 - \frac{2}{e}$

16. $\int_1^e x \ln(x) dx$ est égal à :

a. $\frac{e^2 + 1}{4}$

b. $\frac{e^2 - 1}{4}$

c. $\frac{e^2}{2} - 1$

d. $\frac{e^2 + 1}{2}$

17. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$. Une intégration par parties donne :

a. $I_{n+1} = e + (n + 1)I_n$

b. $I_{n+1} = e - nI_n$

c. $I_{n+1} = e - (n + 1)I_n$

d. $I_{n+1} = (n + 1)I_n - e$

Linéarité et relation de Chasles

18. Soient f et g continues sur $[a, b]$ et λ, μ deux réels. Alors $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x) dx$ est égal à :

a. $\lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$

b. $(\lambda + \mu) \int_a^b (f + g)(x) dx$

c. $\lambda\mu \int_a^b f(x)dx \times \int_a^b g(x)dx$

d. $\lambda \int_a^b f(x)dx - \mu \int_a^b g(x)dx$

19. On sait que $\int_0^3 f(x)dx = 5$ et $\int_0^1 f(x)dx = 2$. Alors $\int_1^3 f(x)dx$ vaut :

a. 7

b. -3

c. 3

d. on ne peut pas conclure

20. Soient f et g continues sur $[a, b]$. L'égalité $\int_a^b f(x)g(x)dx = \left(\int_a^b f(x)dx\right) \left(\int_a^b g(x)dx\right)$:

a. est toujours vraie

b. est vraie si f et g sont positives

c. est vraie si $f = g$

d. est fausse en général

21. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$. Alors $J_n + J_{n+1}$ vaut :

a. $\ln(2)$

b. $\frac{1}{n+2}$

c. $\frac{1}{n+1}$

d. $\frac{2}{n+1}$

Positivité, croissance, encadrements

22. Soit f continue et positive sur $[a, b]$ avec $a < b$. On peut affirmer que :

$$\mathbf{a.} \int_a^b f(x)dx > 0$$

$$\mathbf{b.} \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

c. $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

d. on ne peut rien affirmer

23. Soit f continue et positive sur $[b, a]$ avec $b < a$. Alors $\int_a^b f(x)dx$:

a. est négative

b. est positive

c. est nulle

d. n'est pas définie

24. Pour tout x de $[0, 1]$ on a $1 \leq e^{x^2} \leq e$. On en déduit que :

a. $0 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq 1$

b. $1 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e$

c. $1 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e - 1$

d. $e \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e^2$

25. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$. De l'encadrement $0 \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$ valable sur $[0, 1]$, on déduit que J_n est majoré par :

a. $n + 1$

b. $\frac{1}{n}$

c. $\frac{1}{n+2}$

d. $\frac{1}{n+1}$

26. La suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la question précédente est :

- a.** croissante **b.** décroissante **c.** constante **d.** non monotone

27. Soit f continue sur $[0, 1]$ telle que $\int_0^1 f(x)dx = 0$. On peut affirmer que :

- a.** f est nulle sur $[0, 1]$ **b.** f est positive sur $[0, 1]$
c. f s'annule au moins une fois sur $[0, 1]$ **d.** on ne peut rien affirmer

Aire d'un domaine

28. Soit f continue et positive sur $[a, b]$. L'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ vaut :

- a.** $f(b) - f(a)$ **b.** $\int_a^b f(x)dx$ **c.** $-\int_a^b f(x)dx$ **d.** $\int_a^b f'(x)dx$

29. Soit f continue et négative sur $[a, b]$ avec $a < b$. L'aire du même domaine vaut :

- a.** $-\int_a^b f(x)dx$ **b.** $\int_a^b f(x)dx$ **c.** 0 **d.** $\int_a^b f'(x)dx$

30. Soient f et g continues sur $[a, b]$ telles que $f(x) \leq g(x)$ sur $[a, b]$. L'aire du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ vaut :

- a.** $\int_a^b f(x)g(x)dx$ **b.** $\int_a^b g(x)dx$
c. $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$ **d.** $\int_a^b (g(x) - f(x))dx$

31. Soit f impaire et continue sur $[-2, 2]$. Alors $\int_{-2}^2 f(x)dx$:

- a.** vaut $2 \int_0^2 f(x)dx$ **b.** vaut 0
c. vaut $-2 \int_0^2 f(x)dx$ **d.** dépend de f

32. Soit $f(x) = x^2 - 3x + 2$. L'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$ vaut :

- a.** $\frac{2}{3}$ **b.** $\frac{5}{6}$ **c.** $\frac{7}{6}$ **d.** 1

Intégration sur un segment - exercices

1) Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-1}^1 (x^4 + x^3 - 2x - 1) dx, \quad I_2 = \int_0^2 (x^2 - 3x + 2) dx, \quad I_3 = \int_1^2 \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2} dx, \quad I_4 = \int_0^1 e^{-x} dx$$
$$I_5 = \int_0^2 e^{2x+1} dx, \quad I_6 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx, \quad I_7 = \int_0^1 x^n (1 - x) dx \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

2) Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 2xe^{x^2} dx, \quad I_2 = \int_0^2 \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx, \quad I_3 = \int_e^3 \frac{1}{x \ln(x)} dx,$$
$$I_4 = \int_{-2}^2 \frac{x^3}{x^4 + 1} dx, \quad I_5 = \int_0^1 xe^{1-x^2} dx, \quad I_6 = \int_0^1 \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 3)^3} dx$$

3) Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties :

$$I_1 = \int_0^1 xe^{-x} dx, \quad I_2 = \int_0^1 (x^2)e^{-x} dx, \quad I_3 = \int_1^e x^2 \ln(x) dx.$$

4) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \frac{1}{e^t + 2 + e^{-t}}$

1. Vérifier que pour tout réel t : $f(t) = \frac{e^t}{(e^t + 1)^2}$
2. On pose pour tous réels a et b tels que $a \leq b$ l'intégrale :

$$J(a, b) = \int_a^b f(t) dt$$

Montrer que :

$$J(a, b) = \frac{1}{1 + e^a} - \frac{1}{1 + e^b}$$

3. Interpréter graphiquement l'intégrale précédente.
-

5) Pour tout réel A supérieur ou égal à 1, on note $J(A) = \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2} dx$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$J(A) = \frac{-\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + 1$$

2. Déterminer $\lim_{A \rightarrow +\infty} J(A)$.

6) On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x}$.

1. (a) Déterminer la fonction dérivée f' de f .
(b) Montrer que $f'(x) < 0$ sur $]0, 1[$ et $f'(x) > 0$ sur $]1, +\infty[$
(c) En déduire les variations de la fonction f .
 2. Montrer que sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormal admet une asymptote oblique Δ d'équation $y = x$
 3. Préciser la position relative de $\mathcal{C}$ et de Δ .
 4. Tracer $\mathcal{C}$ et Δ
 5. Soit $a > 1$. Calculer l'aire en unité d'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}$, Δ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = a$. (On hachurera sur le graphique précédent le domaine considéré.)
 6. On note $\mathcal{A}(a)$ cette aire.
Déterminer la limite de $\mathcal{A}(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.
-

7) On considère la fonction f de la variable réelle x définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^x(x - 1) + x^2$$

Soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
 2. Calculer la fonction dérivée de f et en déduire les variations de f .
 3. Donner les équations des tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses 0 et 1.
 4. Tracer $\mathcal{C}$ dans un repère d'unités 5cm en abscisses et 3cm en ordonnées.
 5. Soit φ la courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto x^2$.
Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de φ et tracer φ sur le graphique précédent.
 6. Soit $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire du domaine de plan $\mathcal{D}$ délimité par $\mathcal{C}$, φ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
Hachurer $\mathcal{D}$ sur le graphique.
 7. Exprimer $\mathcal{A}$ sous forme d'une intégrale.
 8. En utilisant une intégration par parties, déterminer $\mathcal{A}$.
 9. Donner la valeur de $\mathcal{A}$ en cm^2 .
-

8) Pour tout entier $n \geq 1$ on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

1. (a) Vérifier que pour tout réel t appartenant à $[0; 1]$ on a :

$$\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$$

- (b) En déduire que $I_1 = 1 - \ln(2)$.
- (c) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$.
- (d) En déduire la valeur de I_2 puis celle de I_3 .

Soit k un réel strictement positif. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = k \frac{t}{1+t} \quad \text{si } t \in [0; 1] \text{ et } f(t) = 0 \text{ sinon}$$

2. En utilisant l'un des calculs de la question 1. déterminer la valeur qu'il faut donner à k pour que $\int_0^1 f(t)dt = 1$
 Dans la suite de l'exercice, on suppose que k est la valeur trouvée à la question 2.
3. (a) Montrer que pour tout réel $x \in [0; 1]$ on a :

$$\int_0^x f(t)dt = k(x - \ln(1+x))$$

4. En utilisant les calculs de la question 1 calculer $\int_0^1 tf(t)dt$ et $\int_0^1 t^2 f(t)dt$

9) On désigne par f une fonction définie et continue sur $[0, 1]$ et on considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$I_0 = \int_0^1 f(x)dx \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, \quad I_n = \int_0^1 x^n f(x)dx$$

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour différentes fonctions f .

1. Dans cette question, on suppose que f est définie par : $f(x) = \ln(1+x^2)$.

- (a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$I_n = \frac{1}{n+1} \left(\ln(2) - 2 \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2} dx \right).$$

- (b) Établir, pour tout x de $[0, 1]$, l'encadrement : $0 \leq \frac{x^{n+2}}{1+x^2} \leq x^{n+2}$.

- (c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2} dx = 0$.

- (d) Quelle est la limite de nI_n quand n tend vers $+\infty$?

2. Dans cette question, on suppose que f est définie par : $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$.

- (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $I_n + I_{n+1} + I_{n+2}$ en fonction de n .

- (b) Étudier la monotonie éventuelle de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- (c) En déduire, pour tout n supérieur ou égal à 2, l'encadrement :

$$\frac{1}{3(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{3(n-1)}.$$

- (d) Quelle est la limite de nI_n quand n tend vers $+\infty$?

3. Dans cette question, on suppose que f est définie par : $f(x) = e^{-x}$, où e désigne la base des logarithmes népériens.

- (a) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

- (b) Établir, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'encadrement : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

En déduire la valeur de la limite de la suite quand n tend vers $+\infty$.

- (c) Exprimer à l'aide d'une intégration par parties, I_{n+1} en fonction de I_n pour tout n de $\mathbb{N}$.

- (d) En déduire la limite de nI_n quand n tend vers $+\infty$.

10) Pour tout entier naturel n , on pose pour tout réel x de $[0, 1]$, $g_n(x) = \ln(1 + e^{-nx})$ et

$$I_n = \int_0^1 g_n(x) dx$$

7. (a) Montrer que $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$.

(b) En déduit que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

(c) Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est convergente.

8. (a) à l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n ,

$$I_n = \ln(1 + e^{-n}) + n \int_0^1 \frac{xe^{-nx}}{1 + e^{-nx}} dx$$

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \ln(1 + e^{-n}) + n \int_0^1 xe^{-nx} dx$.

(c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\int_0^1 xe^{-nx} dx = \frac{-e^{-n}}{n} + \frac{1 - e^{-n}}{n^2}$.

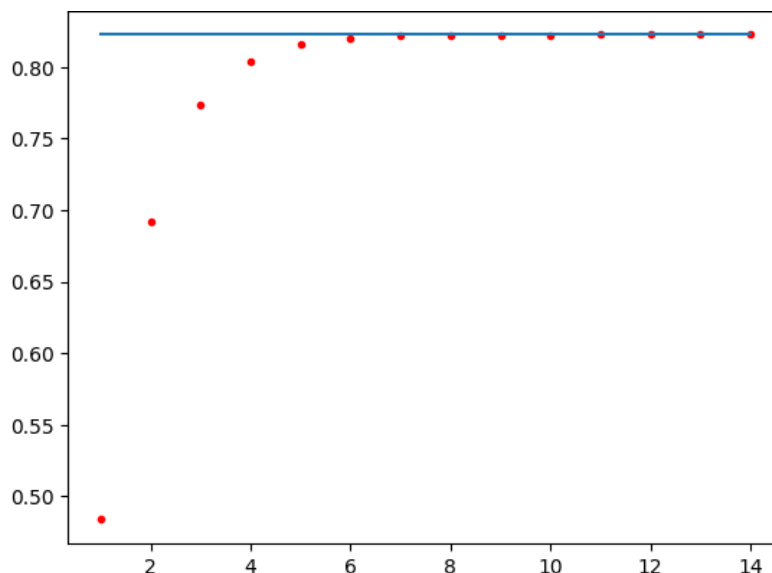
(d) En déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

9. (a) Écrire une fonction en langage Python, nommée gn , prenant en entrée un entier naturel non nul n et un réel x et renvoyant $g_n(x)$.

(b) On dispose d'une fonction en langage Python nommée I prenant en entrée un entier naturel non nul n et renvoyant une valeur approchée de I_n à 10^{-7} près. En exécutant le code suivant :

```
1. import numpy as np
2. import matplotlib.pyplot as plt
3. Lx=np.zéros(14)
4. Ly=np.zéros(14)
5. for n in range(14) :
6.     Lx[n]=n+1
7.     Ly[n]=(n+1)*I(n+1)
8. plt.plot(Lx, Ly, '.r')
9. plt.plot([1,14],[np.pi**2/12, np.pi**2/12])
10. plt.show()
```

Sur la figure ci-dessous :



Que peut-on conjecturer sur la suite $(nI_n)_{n \geq 1}$?

11) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$, et pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$u_n = \int_0^1 (\ln(1+t))^n dt$$

1. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que : pour tout $t \geq 0$,

$$g(t) = (1+t) \ln(1+t) - t$$

(a) On note g' la fonction dérivée de g . Calculer $g'(t)$ pour tout réel $t \geq 0$.

(b) En déduire la valeur de u_1 .

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ à valeurs réelles telle que :

$$f(t) = \ln(1+t)$$

(a) On note f' et f'' respectivement, les dérivées première et seconde de f . Calculer pour tout réel t de $[0, 1]$, $f'(t)$ et $f''(t)$.

(b) Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0, 1]$ et tracer la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (on donne : $\ln(2) \approx 0,7$).

(c) Montrer que la fonction f est concave sur $[0, 1]$.

3. (a) Justifier pour tout réel t de $[0, 1]$, l'encadrement suivant :

$$0 \leq \ln(1+t) \leq \ln(2)$$

(b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $0 \leq u_n \leq (\ln(2))^n$.

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et a pour limite 0.

4. (a) À l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout entier naturel n , la relation suivante :

$$u_{n+1} = 2(\ln(2))^{n+1} - (n+1)u_n \quad (*)$$

(on pourra remarquer qu'une primitive de la fonction $t \mapsto 1$ est $t \mapsto 1+t$)

(b) Utiliser la relation $(*)$ pour compléter le script **Python** suivant afin qu'il calcule et affiche u_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
1. import numpy as np
2. n=int(input('entrer n :'))
3. u=...
4. for k in range(...):
5.     u=...
6. print(u)
```

(c) Montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$(n+1)u_n \leq 2(\ln(2))^{n+1}$$

(d) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

(e) En utilisant la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$(n+2)u_n \geq 2(\ln(2))^{n+1}$$

(f) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nu_n}{2(\ln(2))^{n+1}}$.

12) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telle que : $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

On ne cherchera pas à calculer l'intégrale qui définit $f(x)$.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telle que $g(t) = \frac{e^t}{t}$ et G une primitive de g sur $\mathbb{R}_+^*$.
 - (a) Pour tout réel $x > 0$, exprimer $f(x)$ à l'aide de la fonction G .
 - (b) Dédire de la question précédente que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout réel $x > 0$, calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f .
 - (c) Calculer $f(1)$.
2.
 - (a) Établir pour tout réel $x \geq 1$, l'inégalité $f(x) \geq e \times \ln x$.
 - (b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3.
 - (a) Établir pour tout réel x de l'intervalle $]0, 1]$, l'inégalité $f(x) \leq e^x \times \ln x$.
 - (b) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
4. Dresser le tableau de variation de f .
5. On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unité 1 cm pour les abscisses et e cm pour les ordonnées (on rappelle que le nombre e est à peu près égal à 2,7).
 - (a) On note f'' la dérivée seconde de f . Pour tout réel $x > 0$, calculer $f''(x)$.
 - (b) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion A et déterminer les coordonnées du point A .
 - (c) Écrire l'équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $(\mathcal{C})$ au point A .
 - (d) Tracer l'allure de la courbe $(\mathcal{C})$ en précisant la position relative de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{T})$.
6.
 - (a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un unique réel, noté u_n , vérifiant $\int_1^{u_n} \frac{e^t}{t} dt = n$.
 - (b) En utilisant les variations de la fonction f , montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante.
 - (c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.