

Exercice 1

Calculer une primitive de la fonction f sur $]0, +\infty[$

1. $f(x) = 3x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 7x + 1,$

2. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x,$

3. $f(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}},$

4. $f(x) = \frac{1}{x^3} - 2x,$

5. $f(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}.$

Exercice 2

Déterminer une primitive des fonctions suivantes

1. $f(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$

2. $f(x) = (3x^2 + 1)(x^3 + x + 2)$

3. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

4. $f(x) = \frac{3x}{(x^2 - 1)^4}$

5. $f(x) = (x + 1)\left(\frac{1}{2}x^2 + x - 1\right)^3$

6. $f(x) = e^{2x+3}$

7. $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

8. $f(x) = \frac{4}{3x - 2}$

9. $f(x) = xe^{x^2}$

10. $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-1}^1 (x^4 + x^3 - 2x - 1)dx, \quad I_2 = \int_0^1 2xe^{x^2} dx, \quad I_3 = \int_1^2 \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2} dx, \quad I_4 = \int_e^3 \frac{\ln x}{x} dx$$

$$I_5 = \int_0^2 e^{2x+1} dx, \quad I_6 = \int_{-2}^2 \frac{x^3}{x^4 + 1} dx, \quad I_7 = \int_0^1 x^n(1 - x)dx \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^2 (t^2 - 3t + 2)dt, \quad I_2 = \int_0^1 e^{-t}dt, \quad I_3 = \int_0^1 \frac{e^t}{e^t + 1}dt,$$
$$I_4 = \int_0^2 \frac{2t+1}{t^2+t+1}dt, \quad I_5 = \int_0^1 te^{1-t^2}dt, \quad I_6 = \int_0^1 \frac{2t+1}{(t^2+t+3)^3}dt$$

Exercice 5

1. Déterminer deux réels a et b tels que l'on ait, pour tout réel x différent de -1 et de 5 :

$$\frac{1}{-x^2 + 4x + 5} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{-x+5}$$

2. Calculer l'intégrale $\int_0^2 \frac{1}{-x^2 + 4x + 5} dx$
-

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{1}{e^t + 2 + e^{-t}}$$

1. Vérifier que pour tout réel t :

$$f(t) = \frac{e^t}{(e^t + 1)^2}$$

2. On pose pour tous réels a et b tels que $a \leq b$ l'intégrale :

$$J(a, b) = \int_a^b f(t) dt$$

Montrer que :

$$J(a, b) = \frac{1}{1 + e^a} - \frac{1}{1 + e^b}$$

3. Interpréter graphiquement l'intégrale précédente.
-

Exercice 7

Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties :

$$I_1 = \int_0^1 xe^{-x}dx, \quad I_2 = \int_0^1 (x-1)e^{-3x}dx, \quad , I_3 = \int_1^e x^2 \ln(x)dx.$$

Exercice 8

Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout réel A supérieur ou égal à 1 :

$$I_A = \int_1^A \frac{4 \ln(x)}{x^3} dx = 1 - \frac{1}{A^2} - \frac{2 \ln(A)}{A^2}$$

En déduire $\lim_{A \rightarrow +\infty} I_A$.

Exercice 9

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_1^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) dx = 2\ln(3) - 3\ln(2) + \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx,$$

et en déduire que :

$$\int_1^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) dx = 3\ln(3) - 4\ln(2).$$

Exercice 10

1. Déterminer la dérivée de la fonction u définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$u(x) = (\ln(x))^2$$

2. En déduire que $\int_1^e \left(\frac{x}{4} + \frac{1 + \ln(x)}{x}\right) dx = \frac{e^2 + 11}{8}$