

Mathématiques
Automatismes et calculs : calcul intégral
-corrigé-

Exercice 1

On note F une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

1. $f(x) = 3x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 7x + 1$ donc

$$F(x) = 3 \times \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{x^4}{4} - 7 \times \frac{x^2}{2} + x = \frac{3}{5}x^5 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{2}x^2 + x$$

2. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x$ donc

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - 2 \times \frac{x^3}{3} + 3 \times \frac{x^2}{2} = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

3. $f(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}}$ donc

$$F(x) = -2 \times 2\sqrt{x} = -4\sqrt{x}$$

4. $f(x) = \frac{1}{x^3} - 2x$ donc

$$F(x) = -\frac{1}{2x^2} - 2 \times \frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2x^2} - x^2$$

5. $f(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}$ donc

$$F(x) = 4 \times \frac{-1}{x} - \ln(x) = -\frac{4}{x} - \ln(x)$$

Exercice 2

On reconnaît à chaque fois une des formes usuelles

$$u'u^n \longrightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1}, \quad \frac{u'}{u} \longrightarrow \ln(u), \quad \frac{u'}{\sqrt{u}} \longrightarrow 2\sqrt{u}, \quad u'e^u \longrightarrow e^u.$$

1. Avec $u(x) = x^2 + 1$ et $u'(x) = 2x$: $f = \frac{u'}{u^2} = u'u^{-2}$, donc

$$F(x) = \frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x^2 + 1}$$

2. Avec $u(x) = x^3 + x + 2$ et $u'(x) = 3x^2 + 1$: $f = u'u$, donc

$$F(x) = \frac{u^2}{2} = \frac{(x^3 + x + 2)^2}{2}$$

3. Avec $u(x) = x^2 + 1 > 0$ et $u'(x) = 2x$: $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{u}$, donc

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$$

4. Avec $u(x) = x^2 - 1$ et $u'(x) = 2x$: $f(x) = \frac{3}{2} \times \frac{2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{3}{2} u'u^{-4}$, donc

$$F(x) = \frac{3}{2} \times \frac{u^{-3}}{-3} = -\frac{1}{2(x^2 - 1)^3}$$

(sur tout intervalle ne contenant ni -1 ni 1).

5. Avec $u(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 1$ et $u'(x) = x + 1 : f = u'u^3$, donc

$$F(x) = \frac{u^4}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}x^2 + x - 1 \right)^4$$

6. Avec $u(x) = 2x + 3$ et $u'(x) = 2 : f(x) = \frac{1}{2}u'e^u$, donc

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x+3}$$

7. Avec $u(x) = x^2 + 1 > 0$ et $u'(x) = 2x : f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$, donc

$$F(x) = 2\sqrt{x^2 + 1}$$

8. Avec $u(x) = 3x - 2$ et $u'(x) = 3 : f(x) = \frac{4}{3} \times \frac{3}{3x-2} = \frac{4}{3} \times \frac{u'}{u}$, donc

$$F(x) = \frac{4}{3} \ln |3x - 2|$$

$$(\text{soit } F(x) = \frac{4}{3} \ln(3x - 2) \text{ sur }]\frac{2}{3}; +\infty[).$$

9. Avec $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x : f(x) = \frac{1}{2} \times 2xe^{x^2} = \frac{1}{2}u'e^u$, donc

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

10. Avec $u(x) = e^x + 1 > 0$ et $u'(x) = e^x : f = \frac{u'}{u}$, donc

$$F(x) = \ln(e^x + 1)$$

Exercice 3

- $I_1 = \int_{-1}^1 (x^4 + x^3 - 2x - 1)dx = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - x^2 - x \right]_{-1}^1$
 $= \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} - 1 - 1 \right) - \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{4} - 1 + 1 \right) = \frac{2}{5} - 2 = -\frac{8}{5}$

- Avec $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x :$

$$I_2 = \int_0^1 2xe^{x^2} dx = \left[e^{x^2} \right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

- Avec $u(x) = x^2 + x + 1$, $u'(x) = 2x + 1 : \frac{u'}{u^2}$ a pour primitive $-\frac{1}{u}$, donc

$$I_3 = \int_1^2 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx = \left[-\frac{1}{x^2+x+1} \right]_1^2 = -\frac{1}{7} + \frac{1}{3} = \frac{-3+7}{21} = \frac{4}{21}$$

- Avec $u(x) = \ln(x)$, $u'(x) = \frac{1}{x} : u'u$ a pour primitive $\frac{u^2}{2}$, donc

$$I_4 = \int_e^3 \frac{\ln(x)}{x} dx = \left[\frac{(\ln(x))^2}{2} \right]_e^3 = \frac{(\ln 3)^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{(\ln 3)^2 - 1}{2}$$

- $I_5 = \int_0^2 e^{2x+1} dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x+1} \right]_0^2 = \frac{1}{2} e^5 - \frac{1}{2} e = \frac{e^5 - e}{2}$

- Avec $u(x) = x^4 + 1 > 0$, $u'(x) = 4x^3 :$

$$I_6 = \int_{-2}^2 \frac{x^3}{x^4+1} dx = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 \frac{4x^3}{x^4+1} dx = \left[\frac{1}{4} \ln(x^4+1) \right]_{-2}^2 = \frac{\ln(17)}{4} - \frac{\ln(17)}{4} = 0$$

(ce que l'on pouvait prévoir : la fonction intégrée est impaire et l'intervalle est symétrique par rapport à 0).

- Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$I_7 = \int_0^1 x^n(1-x)dx = \int_0^1 (x^n - x^{n+1}) dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Exercice 4

- $I_1 = \int_0^2 (t^2 - 3t + 2)dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t \right]_0^2 = \frac{8}{3} - 6 + 4 = \frac{8-6}{3} = \frac{2}{3}$
- $I_2 = \int_0^1 e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^1 = -e^{-1} + 1 = 1 - \frac{1}{e}$
- Avec $u(t) = e^t + 1 > 0$, $u'(t) = e^t$:

$$I_3 = \int_0^1 \frac{e^t}{e^t + 1} dt = [\ln(e^t + 1)]_0^1 = \ln(e + 1) - \ln(2)$$

- Avec $u(t) = t^2 + t + 1 > 0$ sur $[0, 2]$, $u'(t) = 2t + 1$:

$$I_4 = \int_0^2 \frac{2t+1}{t^2+t+1} dt = [\ln(t^2+t+1)]_0^2 = \ln(7) - \ln(1) = \ln(7)$$

- Avec $u(t) = 1 - t^2$, $u'(t) = -2t$:

$$I_5 = \int_0^1 te^{1-t^2} dt = -\frac{1}{2} \int_0^1 (-2t)e^{1-t^2} dt = \left[-\frac{1}{2}e^{1-t^2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} + \frac{e}{2} = \frac{e-1}{2}$$

- Avec $u(t) = t^2 + t + 3$, $u'(t) = 2t + 1$: $\frac{u'}{u^3} = u'u^{-3}$ a pour primitive $\frac{u^{-2}}{-2}$, donc

$$I_6 = \int_0^1 \frac{2t+1}{(t^2+t+3)^3} dt = \left[-\frac{1}{2(t^2+t+3)^2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2 \times 25} + \frac{1}{2 \times 9} = -\frac{1}{50} + \frac{1}{18} = \frac{-9+25}{450} = \frac{8}{225}$$

Exercice 5

1. Pour tout x différent de -1 et de 5 :

$$\frac{a}{x+1} + \frac{b}{-x+5} = \frac{a(-x+5) + b(x+1)}{(x+1)(-x+5)} = \frac{(b-a)x + 5a+b}{-x^2+4x+5}$$

car $(x+1)(-x+5) = -x^2 + 5x - x + 5 = -x^2 + 4x + 5$. Cette expression est égale à $\frac{1}{-x^2+4x+5}$ pour tout x si et seulement si

$$\begin{cases} b-a=0 \\ 5a+b=1 \end{cases} \iff \begin{cases} b=a \\ 6a=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=\frac{1}{6} \\ b=\frac{1}{6} \end{cases}$$

2. En utilisant la question précédente :

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{-x^2+4x+5} dx &= \frac{1}{6} \int_0^2 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{-x+5} \right) dx = \frac{1}{6} [\ln(x+1) - \ln(-x+5)]_0^2 \\ &= \frac{1}{6} [(\ln(3) - \ln(3)) - (\ln(1) - \ln(5))] = \frac{\ln(5)}{6} \end{aligned}$$

Exercice 6

1. Pour tout réel t , $e^t > 0$; en multipliant le numérateur et le dénominateur par e^t :

$$f(t) = \frac{1}{e^t + 2 + e^{-t}} = \frac{e^t}{e^t(e^t + 2 + e^{-t})} = \frac{e^t}{e^{2t} + 2e^t + 1} = \frac{e^t}{(e^t + 1)^2}$$

2. Posons $u(t) = e^t + 1$; alors $u'(t) = e^t$ et $f = \frac{u'}{u^2} = u'u^{-2}$, dont une primitive est $-\frac{1}{u}$. Ainsi, pour $a \leq b$:

$$J(a, b) = \int_a^b \frac{e^t}{(e^t + 1)^2} dt = \left[-\frac{1}{e^t + 1} \right]_a^b = -\frac{1}{e^b + 1} + \frac{1}{e^a + 1} = \frac{1}{1 + e^a} - \frac{1}{1 + e^b}$$

3. La fonction f est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$, et $a \leq b$: $J(a, b)$ est donc l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe représentative de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
-

Exercice 7

- Les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto -e^{-x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^{-x}$. Par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 x e^{-x} dx = \left[-x e^{-x} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} + \left[-e^{-x} \right]_0^1 \\ &= -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$

- Avec $u(x) = x - 1$, $u'(x) = 1$, $v'(x) = e^{-3x}$ et $v(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x}$:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 (x - 1) e^{-3x} dx = \left[-\frac{1}{3}(x - 1) e^{-3x} \right]_0^1 + \frac{1}{3} \int_0^1 e^{-3x} dx \\ &= \left(0 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{3} e^{-3x} \right]_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{9} (1 - e^{-3}) = \frac{-3 + 1 - e^{-3}}{9} = -\frac{2 + e^{-3}}{9} \end{aligned}$$

- Avec $u(x) = \ln(x)$, $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v'(x) = x^2$ et $v(x) = \frac{x^3}{3}$:

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_1^e x^2 \ln(x) dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x} dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3 - 1}{9} = \frac{3e^3 - e^3 + 1}{9} = \frac{2e^3 + 1}{9} \end{aligned}$$

Exercice 8

- Soit $A \geq 1$. Les fonctions $u : x \mapsto \ln(x)$ et $v : x \mapsto -\frac{2}{x^2}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, A]$, avec $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = \frac{4}{x^3}$. Par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_A &= \int_1^A \frac{4 \ln(x)}{x^3} dx = \left[-\frac{2 \ln(x)}{x^2} \right]_1^A + \int_1^A \frac{2}{x^2} \times \frac{1}{x} dx \\ &= -\frac{2 \ln(A)}{A^2} + 0 + 2 \int_1^A x^{-3} dx = -\frac{2 \ln(A)}{A^2} + 2 \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^A \\ &= -\frac{2 \ln(A)}{A^2} - \frac{1}{A^2} + 1 = 1 - \frac{1}{A^2} - \frac{2 \ln(A)}{A^2} \end{aligned}$$

Enfin $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{A^2} = 0$ et, par croissances comparées, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\ln(A)}{A^2} = 0$. Donc

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} I_A = 1$$

Exercice 9

Pour tout $x \in [1, 2]$, $\frac{x+1}{x} > 0$ et $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln(x+1) - \ln(x)$. Posons $u(x) = \ln(x+1) - \ln(x)$ et $v(x) = x$: ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, 2]$ et

$$u'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}, \quad v'(x) = 1$$

Par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) dx &= \left[x(\ln(x+1) - \ln(x)) \right]_1^2 - \int_1^2 x \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= (2\ln(3) - 2\ln(2)) - (\ln(2) - \ln(1)) - \int_1^2 \left(\frac{x}{x+1} - 1 \right) dx \\ &= 2\ln(3) - 3\ln(2) - \int_1^2 \frac{x - (x+1)}{x+1} dx \\ &= 2\ln(3) - 3\ln(2) + \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx \end{aligned}$$

Or

$$\int_1^2 \frac{1}{x+1} dx = \left[\ln(x+1) \right]_1^2 = \ln(3) - \ln(2)$$

donc

$$\int_1^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) dx = 2\ln(3) - 3\ln(2) + \ln(3) - \ln(2) = 3\ln(3) - 4\ln(2)$$

Exercice 10

1. La fonction u est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables, et pour tout $x > 0$:

$$u'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$$

2. D'après la question précédente, $\frac{\ln(x)}{x}$ a pour primitive $\frac{(\ln(x))^2}{2}$ sur $]0, +\infty[$. Comme

$$\frac{x}{4} + \frac{1 + \ln(x)}{x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$$

la fonction G définie sur $]0, +\infty[$ par $G(x) = \frac{x^2}{8} + \ln(x) + \frac{(\ln(x))^2}{2}$ est une primitive de $x \mapsto \frac{x}{4} + \frac{1 + \ln(x)}{x}$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \int_1^e \left(\frac{x}{4} + \frac{1 + \ln(x)}{x} \right) dx &= \left[\frac{x^2}{8} + \ln(x) + \frac{(\ln(x))^2}{2} \right]_1^e \\ &= \left(\frac{e^2}{8} + 1 + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{8} + 0 + 0 \right) \\ &= \frac{e^2}{8} + \frac{3}{2} - \frac{1}{8} = \frac{e^2 + 12 - 1}{8} = \frac{e^2 + 11}{8} \end{aligned}$$