

Intégration sur un segment : Propriétés de l'intégrale

QCM : ai-je compris le chapitre ? — Corrigé

Réponses :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
a	b	b	c	a	b	b	a	c	a	b	a	b	c	d	a

17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
c	a	c	d	c	b	a	b	d	b	c	b	a	d	b	d

Primitives (rappels de première année)

1. Dire que F est une primitive de f sur un intervalle I signifie que :☒ **a** F est dérivable sur I et $F' = f$ sur I .

C'est la définition : on dérive la primitive pour retrouver la fonction de départ.

La proposition c est un nombre, pas une fonction de x . La proposition d est fausse : $f(x) = x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ alors que $F(x) = \frac{x^2}{2}$ ne l'est pas.2. Une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est :☒ **b** $\ln(x)$.

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x} \quad \text{pour tout } x > 0$$

La proposition a est la dérivée de $\frac{1}{x}$, pas une primitive. La proposition c est une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x}}$.3. Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle I :☒ **b** diffèrent d'une constante.Si F et G sont deux primitives de f sur I , alors $(G - F)' = f - f = 0$.Une fonction de dérivée nulle sur un intervalle est constante : il existe k réel tel que $G = F + k$.

4. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto e^{2x+3}$ est :

c $\frac{1}{2}e^{2x+3}$.

$$\left(\frac{1}{2}e^{2x+3}\right)' = \frac{1}{2} \times 2e^{2x+3} = e^{2x+3}$$

Forme e^{ax+b} : une primitive est $\frac{1}{a}e^{ax+b}$. Ici $a = 2$.

5. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$ est :

a $\ln(x^2+1)$.

On reconnaît la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2+1$ et $u'(x) = 2x$:

$$(\ln(x^2+1))' = \frac{2x}{x^2+1}$$

u est strictement positive sur $\mathbb{R}$: la primitive $\ln(u)$ est bien définie partout.

6. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ est :

b $-\frac{1}{x^2+1}$.

Forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x^2+1$: une primitive est $-\frac{1}{u}$.

$$\left(-\frac{1}{x^2+1}\right)' = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

Calcul d'une intégrale (rappels de première année)

7. Soit F une primitive de f sur $[a, b]$. Alors $\int_a^b f(x)dx$ est égal à :

b $F(b) - F(a)$.

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Le résultat ne dépend pas de la primitive choisie : deux primitives diffèrent d'une constante, qui disparaît dans la différence.

8. $\int_a^a f(x)dx$ est égal à :

a 0.

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$$

Géométriquement, le domaine est réduit à un segment vertical : son aire est nulle.

9. Soit c une constante réelle. Alors $\int_a^b c \, dx$ est égal à :

c $c(b - a)$.

$$\int_a^b c \, dx = [cx]_a^b = cb - ca = c(b - a)$$

C'est l'aire du rectangle de hauteur c et de largeur $b - a$.

10. $\int_0^2 e^{2x+1} dx$ est égal à :

a $\frac{e^5 - e}{2}$.

$$\int_0^2 e^{2x+1} dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x+1} \right]_0^2 = \frac{1}{2} e^5 - \frac{1}{2} e = \frac{e^5 - e}{2}$$

Le facteur $\frac{1}{2}$ vient de la dérivée de $2x + 1$: c'est l'oubli le plus fréquent.

11. $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$ est égal à :

b $\ln\left(\frac{e + 1}{2}\right)$.

Forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = e^x + 1$, strictement positive.

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx = [\ln(e^x + 1)]_0^1 = \ln(e + 1) - \ln(2) = \ln\left(\frac{e + 1}{2}\right)$$

12. Pour $n \geq 2$, la somme $S_n = \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$ est égale à :

a $\ln(n)$.

La relation de Chasles recolle les intervalles $[1, 2]$, $[2, 3]$, $\dots$, $[n - 1, n]$:

$$S_n = \int_1^n \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^n = \ln(n) - \ln(1) = \ln(n)$$

Intégration par parties

13. Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a, b]$, de dérivées continues. Alors $\int_a^b u'(x)v(x) dx$ est égal à :

b $[u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$.

On part de la dérivée d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$, donc $u'v = (uv)' - uv'$.

$$\int_a^b u'v = \int_a^b (uv)' - \int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

14. Pour calculer $\int_1^e x^3 \ln(x) dx$ par parties, le choix pertinent est :

☒ **c** $u'(x) = x^3$ et $v(x) = \ln(x)$.

On dérive le logarithme, qui disparaît, et on intègre la puissance, qui reste une puissance.

$$u(x) = \frac{x^4}{4} \quad v'(x) = \frac{1}{x} \quad u(x)v'(x) = \frac{x^3}{4}$$

L'intégrale restante est immédiate. Le choix a conduirait au contraire à une intégrale plus compliquée que celle de départ.

15. $\int_0^1 x e^{-x} dx$ est égal à :

☒ **d** $1 - \frac{2}{e}$.

On pose $u'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = x$, donc $u(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = 1$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{-x} dx &= [-x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -\frac{1}{e} + [-e^{-x}]_0^1 \\ &= -\frac{1}{e} + \left(1 - \frac{1}{e}\right) = 1 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$

16. $\int_1^e x \ln(x) dx$ est égal à :

☒ **a** $\frac{e^2 + 1}{4}$.

On pose $u'(x) = x$ et $v(x) = \ln(x)$, donc $u(x) = \frac{x^2}{2}$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} \int_1^e x \ln(x) dx &= \left[\frac{x^2}{2} \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2 - 1}{4} = \frac{2e^2 - e^2 + 1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4} \end{aligned}$$

17. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$. Une intégration par parties donne :

☒ **c** $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

Dans I_{n+1} on pose $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x^{n+1}$, donc $u(x) = e^x$ et $v'(x) = (n+1)x^n$.

$$I_{n+1} = [x^{n+1} e^x]_0^1 - (n+1) \int_0^1 x^n e^x dx = e - (n+1)I_n$$

Linéarité et relation de Chasles

18. Soient f et g continues sur $[a, b]$ et λ, μ deux réels. Alors $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x) dx$ est égal à :

a $\lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$

C'est la linéarité de l'intégrale : elle se démontre à partir de la linéarité de la dérivation.

Les sommes et les multiples se séparent. En revanche l'intégrale d'un produit n'est pas le produit des intégrales.

19. On sait que $\int_0^3 f(x) dx = 5$ et $\int_0^1 f(x) dx = 2$. Alors $\int_1^3 f(x) dx$ vaut :

c 3.

Relation de Chasles avec $0 < 1 < 3$:

$$\int_0^3 f = \int_0^1 f + \int_1^3 f \quad \text{donc} \quad \int_1^3 f = 5 - 2 = 3$$

20. Soient f et g continues sur $[a, b]$. L'égalité $\int_a^b f(x)g(x) dx = \left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_a^b g(x) dx \right)$:

d est fausse en général.

Contre-exemple avec $f = g = 1$ sur $[0, 2]$, deux fonctions positives et égales :

$$\int_0^2 1 \times 1 dx = 2 \quad \text{alors que} \quad \left(\int_0^2 1 dx \right)^2 = 4$$

L'intégrale est linéaire, elle n'est pas multiplicative.

21. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$. Alors $J_n + J_{n+1}$ vaut :

c $\frac{1}{n+1}.$

La linéarité permet de regrouper les deux intégrales, et la somme se simplifie :

$$\begin{aligned} \frac{x^n}{1+x} + \frac{x^{n+1}}{1+x} &= \frac{x^n(1+x)}{1+x} = x^n \\ J_n + J_{n+1} &= \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Positivité, croissance, encadrements

22. Soit f continue et positive sur $[a, b]$ avec $a < b$. On peut affirmer que :

b $\int_a^b f(x) dx \geqslant 0.$

La positivité de l'intégrale donne une inégalité large.

L'inégalité stricte est fausse en général : la fonction nulle est positive et son intégrale vaut 0.

23. Soit f continue et positive sur $[b, a]$ avec $b < a$. Alors $\int_a^b f(x)dx$:

a est négative.

Les bornes sont écrites dans l'ordre décroissant : on se ramène à l'ordre habituel.

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

Comme $b < a$ et $f \geq 0$, l'intégrale $\int_b^a f$ est positive : son opposée est donc négative.

24. Pour tout x de $[0, 1]$ on a $1 \leq e^{x^2} \leq e$. On en déduit que :

b $1 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e$.

On intègre l'encadrement entre 0 et 1 (croissance de l'intégrale) :

$$\int_0^1 1dx \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq \int_0^1 e dx$$

$$1 \times (1 - 0) \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e \times (1 - 0)$$

L'intervalle est de longueur 1 : les bornes de l'encadrement sont inchangées.

25. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$. De l'encadrement $0 \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$ valable sur $[0, 1]$, on déduit que J_n est majoré par :

d $\frac{1}{n+1}$.

On intègre l'encadrement entre 0 et 1 :

$$\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \quad \text{donc} \quad 0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Comme $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0, ce majorant donne aussi la limite de la suite.

26. La suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la question précédente est :

b décroissante.

Pour $x \in [0, 1]$ on a $x^{n+1} \leq x^n$; on divise par $1+x^2$, qui est strictement positif :

$$\frac{x^{n+1}}{1+x^2} \leq \frac{x^n}{1+x^2}$$

La croissance de l'intégrale donne alors $J_{n+1} \leq J_n$.

27. Soit f continue sur $[0, 1]$ telle que $\int_0^1 f(x)dx = 0$. On peut affirmer que :

c f s'annule au moins une fois sur $[0, 1]$.

Raisonnons par l'absurde. Si f ne s'annulait jamais, elle garderait un signe constant sur $[0, 1]$, puisqu'elle est continue.

Or si $f > 0$ partout alors $\int_0^1 f > 0$, et si $f < 0$ partout alors $\int_0^1 f < 0$. Dans les deux cas l'intégrale n'est pas nulle.

La proposition a est trop forte : $f(x) = x - \frac{1}{2}$ a une intégrale nulle sans être la fonction nulle.

Aire d'un domaine

28. Soit f continue et positive sur $[a, b]$. L'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ vaut :

b $\int_a^b f(x)dx$.

C'est la définition même de l'intégrale d'une fonction positive, exprimée en unités d'aire.

La proposition d vaut $f(b) - f(a)$: c'est une variation de la fonction, pas une aire.

29. Soit f continue et négative sur $[a, b]$ avec $a < b$. L'aire du même domaine vaut :

a $-\int_a^b f(x)dx$.

La fonction $-f$ est positive et sa courbe est la symétrique de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'axe des abscisses : les deux domaines ont la même aire.

$$\mathcal{A} = \int_a^b (-f(x)) dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Une aire est positive. Ici $\int_a^b f \leq 0$, donc son opposée est bien positive.

30. Soient f et g continues sur $[a, b]$ telles que $f(x) \leq g(x)$ sur $[a, b]$. L'aire du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ vaut :

d $\int_a^b (g(x) - f(x))dx$.

On intègre la différence « courbe du haut moins courbe du bas ».

Comme $f \leq g$, la fonction $g - f$ est positive : l'intégrale de la proposition d est bien positive, celle de la proposition c en serait l'opposée.

Le résultat ne suppose pas que f et g soient positives.

31. Soit f impaire et continue sur $[-2, 2]$. Alors $\int_{-2}^2 f(x)dx$:

b vaut 0.

On coupe en 0 par la relation de Chasles, puis on utilise f impaire :

$$\int_{-2}^2 f = \int_{-2}^0 f + \int_0^2 f \quad \text{avec} \quad \int_{-2}^0 f = -\int_0^2 f$$

32. Soit $f(x) = x^2 - 3x + 2$. L'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$ vaut :

d 1.

$f(x) = (x - 1)(x - 2)$: la fonction est positive sur $[0, 1]$ et négative sur $[1, 2]$. On découpe donc l'intervalle.

$$\int_0^1 f = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{5}{6}$$

$$\int_1^2 f = \left(\frac{8}{3} - 6 + 4 \right) - \frac{5}{6} = \frac{2}{3} - \frac{5}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$\mathcal{A} = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

L'intégrale $\int_0^2 f = \frac{2}{3}$ (proposition a) n'est pas l'aire : les deux morceaux se compensent partiellement.