

Chapitre 1 — Calcul numérique et algébrique

1.1 ★ $x^n x^m = x^{n+m}$;

$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$;

$(x^n)^m = x^{nm}$;

$(xy)^n = x^n y^n$;

$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$;

$x^0 = 1$.

1.2 $3^{n+2} - 3^n = 3^n(9 - 1) = 8 \times 3^n$;

$4 \times 2^{n+2} - 3 \times 2^{n+1} + 5 \times 2^n = 2^n(16 - 6 + 5) = 15 \times 2^n$. (On factorise par la plus petite puissance.)

1.3 $\sqrt{a}$ est l'unique réel **positif** dont le carré vaut a . Pour $a \geq 0$: $\sqrt{a^2} = a$ et $(\sqrt{a})^2 = a$. Pour a quelconque, $\sqrt{a^2} = |a|$.

1.4 ★ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

1.5 Facteur commun apparent ($ka + kb = k(a + b)$, sans oublier le facteur 1 : $ab + a = a(b + 1)$) ; reconnaissance d'une identité remarquable ;

factorisation par le terme dominant : si $a \neq 0$, $a + b = a \left(1 + \frac{b}{a}\right)$.

1.6 On dresse un tableau de signes : ligne du numérateur, ligne du dénominateur, puis règle des signes.

Une **double barre** marque les valeurs interdites, là où B s'annule.

Exemple avec $\frac{x-1}{x+2}$:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x-1$		$-$	$-$	0 $+$
$x+2$		$-$	0 $+$	$+$
$\frac{x-1}{x+2}$		$+$ $\parallel$	$-$	0 $+$

Ensemble des solutions de $\frac{x-1}{x+2} \geq 0$: $] -\infty ; -2[\cup [1 ; +\infty[$.

1.7 ★ Multiplier ou diviser par un réel **strictement négatif change le sens** de l'inégalité. Et on ne multiplie jamais par une quantité de signe inconnu (par ex. x) sans discuter.

1.8 ...l'un au moins des facteurs est nul. C'est l'outil de base pour résoudre une équation après factorisation.

Chapitre 2 — Polynômes à coefficients réels

2.1 $f(x) = ax + b$, représentée par la droite d'équation $y = ax + b$. Coefficient directeur : $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$;
 b est l'ordonnée à l'origine.

2.2 $ax + b$ s'annule en $-\frac{b}{a}$.

Il est **du signe de a après** cette racine, du signe contraire avant.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	signe de $-a$	0	signe de a

2.3 ★ $\Delta > 0$: deux racines $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

$\Delta = 0$: une racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$ et $P(x) = a(x - x_0)^2$.

$\Delta < 0$: aucune racine réelle, aucune factorisation du premier degré.

2.4 ★ Si $\Delta < 0$: $P(x)$ est toujours du signe de a , et ne s'annule jamais.

Si $\Delta = 0$: $P(x)$ est du signe de a , et s'annule en x_0 .

Si $\Delta > 0$, en notant $x_1 < x_2$ les deux racines :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de $-a$	signe de a

Autrement dit : du signe de a à l'extérieur des racines, du signe de $-a$ entre les racines.

2.5 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Si l'on « voit » qu'une racine évidente est 1 (resp. -1), l'autre vaut $\frac{c}{a}$ (resp. $-\frac{c}{a}$), sans calcul de Δ .

2.6 Un réel a tel que $P(a) = 0$; autrement dit une solution de l'équation $P(x) = 0$.

2.7 ★ Il existe un polynôme Q tel que $P(x) = (x - a)Q(x)$ pour tout x , avec $\deg Q = \deg P - 1$. Plus généralement, si $a_1, \dots, a_p$ sont p racines distinctes, $P(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_p)Q(x)$.

2.8 Les coefficients indéterminés (on pose $Q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, on développe, on identifie) ou la division euclidienne de P par $(x - a)$ — polynômes écrits sous forme développée, ordonnée, réduite.

3.1 ★ $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout n . Alors $u_n = u_0 + nr$, et plus généralement $u_n = u_p + (n - p)r$.

3.2 ★ $u_{n+1} = q u_n$ pour tout n . Alors $u_n = u_0 q^n$, et $u_n = u_p q^{n-p}$.

3.3 Arithmétique : calculer $u_{n+1} - u_n$ et montrer que c'est une **constante** indépendante de n ; cette constante est la raison r .

Géométrique : trouver un réel q , indépendant de n , tel que $u_{n+1} = q u_n$ pour tout n ; ce réel q est la raison.

3.4 ★
$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

3.5 ★ $u_0 + \dots + u_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$, c'est-à-dire (nb de termes) $\times \frac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$.

3.6 ★
$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \text{ si } q \neq 1, \text{ et } n+1 \text{ si } q = 1.$$

3.7 ★ Chercher le point fixe ℓ solution de $\ell = a\ell + b$, poser $v_n = u_n - \ell$: (v_n) est géométrique de raison a . On en déduit v_n puis $u_n = v_n + \ell$.

3.8 $\sum_{k=0}^n (\lambda u_k) = \lambda \sum_{k=0}^n u_k$ et $\sum_{k=0}^n (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=0}^n v_k$. Attention : la somme d'un produit n'est pas le produit des sommes.

3.9 ★
$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0$$
 : tous les termes intermédiaires se simplifient.

3.10 Initialisation (la propriété est vraie au rang initial) ;
 hérédité (on suppose $P(n)$ vraie pour un n fixé et on démontre $P(n+1)$) ;
 conclusion (par principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$).

3.11 Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
 Ou comparer directement u_{n+1} et u_n .
 Ou étudier les variations de f lorsque $u_n = f(n)$.

3.12

```
s = 0
for k in range(n+1):
    s = s + k**3
print(s)
```

Rappel : `range(n+1)` fait parcourir $0, 1, \dots, n$;
`range(a, b+1)` fait parcourir $a, \dots, b$.

Chapitre 4 — Généralités sur les fonctions · valeur absolue

4.1 $b = f(a)$. Un réel a **une seule** image mais peut avoir plusieurs antécédents (graphiquement : intersections de la courbe avec la droite horizontale $y = b$).

4.2 Pour tous $x, y \in I$: $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$;
strictement croissante si $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

4.3 ★ Paire : $\forall x \in D, -x \in D$ et $f(-x) = f(x)$ — courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Impaire : $f(-x) = -f(x)$ — courbe symétrique par rapport à l'origine.

4.4 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, définie pour les x du domaine de f tels que $f(x)$ appartienne au domaine de g . En général $g \circ f \neq f \circ g$.

4.5 ★ Si tout y de J admet **un unique** antécédent dans I par f (l'équation $f(x) = y$ a une unique solution dans I). f^{-1} associe à y cette solution : $(y = f(x), x \in I) \Leftrightarrow (x = f^{-1}(y), y \in J)$, et $f^{-1} \circ f = \text{id}_I, f \circ f^{-1} = \text{id}_J$.

4.6 Elles sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (dans un repère orthonormé).

4.7 On résout l'équation $f(x) = g(x)$: ses solutions sont les **abscisses** des points d'intersection. Pour chaque solution x_0 , l'ordonnée s'obtient en calculant $f(x_0)$, qui vaut aussi $g(x_0)$. Le point d'intersection est donc $M(x_0; f(x_0))$.
Si l'équation n'a pas de solution, les deux courbes ne se coupent pas.

4.8 ★ On étudie le **signe de la différence** $d(x) = f(x) - g(x)$ dans un tableau de signes.

Si $d(x) > 0$, alors $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de $\mathcal{C}_g$.

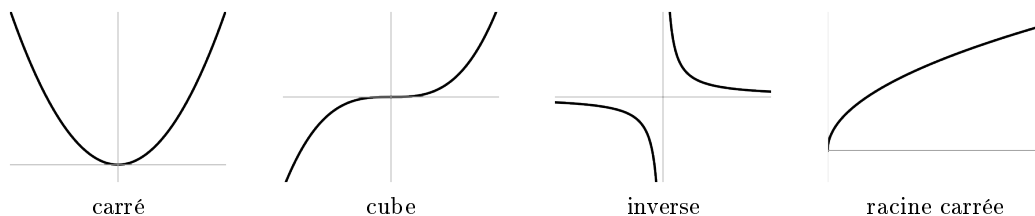
Si $d(x) < 0$, alors $\mathcal{C}_f$ est **au-dessous** de $\mathcal{C}_g$.

Si $d(x) = 0$, les deux courbes se coupent.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x) - g(x)$	—	0	+
position	$\mathcal{C}_f$ au-dessous	contact	$\mathcal{C}_f$ au-dessus

4.9 $|x - a|$ est la distance de x à a , donc $|x - a| \leq r \Leftrightarrow x \in [a - r; a + r]$.

4.10



La parabole est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, la cubique par rapport à l'origine. L'hyperbole a les deux axes pour asymptotes. La courbe de la racine carrée part de l'origine et n'existe que pour $x \geq 0$.

Chapitre 5 — Fonctions : limites et continuité

5.1 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. C'est le cas en tout point de leur domaine pour les fonctions polynômes, rationnelles, racine carrée et leurs composées.

5.2 ★ Premier cas : la droite **verticale** $x = a$ est asymptote à la courbe. Second cas : la droite **horizontale** $y = \ell$ est asymptote en $+\infty$.

5.3 La droite D d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$; même définition en $-\infty$.

En pratique, on écrit $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ et on montre que $\varepsilon(x)$ tend vers 0.

Le **signe de** $f(x) - (ax + b)$ donne ensuite la position de la courbe par rapport à son asymptote.

Exemple : $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x}$ admet la droite d'équation $y = 2x - 1$ pour asymptote en $\pm\infty$.

5.4 ★ $\infty - \infty$;

$0 \times \infty$;

$\frac{\infty}{\infty}$;

$\frac{0}{0}$;

$\frac{0}{0}$. Dans ces cas, il faut transformer l'expression (factoriser, réduire, conjuguer...).

5.5 ★ Celle de son **monôme de plus haut degré** ;

pour une fraction rationnelle, celle du **quotient des monômes de plus haut degré** du numérateur et du dénominateur.

5.6 Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$, alors $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$ (a, b, c finis ou infinis).

5.7 ★ f est définie en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. f est continue sur I si elle l'est en tout point de I — graphiquement, la courbe se trace « sans lever le crayon ».

5.8 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Chapitre 6 — Fonctions : dérivation et convexité

6.1 ★ $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (limite du taux d'accroissement), quand elle existe et est finie. C'est le **coefficient directeur de la tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a .

6.2 ★ $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

6.3 ★

$f(x)$	$f'(x)$	dérivable sur
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$n x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$]0; +\infty[$

6.4 ★ $(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.

6.5 ★

f	f'	condition sur u
$u^n, n \in \mathbb{N}^*$	$n u' u^{n-1}$	—
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	u ne s'annule pas
$\frac{1}{u^n}$	$-\frac{n u'}{u^{n+1}}$	u ne s'annule pas
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$
e^u	$u' e^u$	—
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$	$u > 0$

6.6 ★ Si $f' \geq 0$ sur I , alors f est croissante sur I .
Si $f' \leq 0$ sur I , alors f est décroissante sur I .

Si $f' = 0$ sur I , alors f est constante sur I .

Si $f' > 0$ sauf en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante.

6.7 Si f' s'annule en changeant de signe en a . La tangente y est alors horizontale. ($f'(a) = 0$ seul ne suffit pas : penser à $x \mapsto x^3$ en 0.)

6.8 ★ f est convexe sur I si sa courbe est **au-dessous de ses cordes** sur I ;
concave si $-f$ est convexe, c'est-à-dire si la courbe est au-dessus de ses cordes.

6.9 ★ f est convexe sur $I \Leftrightarrow f'' \geq 0$ sur I (et concave $\Leftrightarrow f'' \leq 0$). De façon équivalente, f' est croissante.

6.10 ★ La courbe d'une fonction convexe est **au-dessus de ses tangentes** (et au-dessous de ses cordes) ;
c'est l'inverse pour une fonction concave.

6.11 ★ Point où la courbe traverse sa tangente : f est convexe d'un côté, concave de l'autre. Critère : si f'' s'annule en changeant de signe en a , alors $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion.

Chapitre 7 — Espaces probabilisés finis

7.1 Ω est l'ensemble des résultats observables de l'expérience aléatoire ;
un événement est une partie de Ω . « A et B » = $A \cap B$;
« A ou B » = $A \cup B$;
« non A » = $\overline{A}$.

7.2 ...deux événements A et B tels que $A \cap B = \emptyset$: ils ne peuvent pas être réalisés simultanément.

7.3 ★ Une famille $(A_1, \dots, A_n)$ d'événements **deux à deux incompatibles** dont la **réunion est** Ω . On a alors $\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$. Exemple fondamental : $(A, \overline{A})$.

7.4 Une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ telle que $P(\Omega) = 1$ et, pour tous A, B incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

7.5 ★ $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

7.6 ★ Dans le cas général, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Si A et B sont **incompatibles**, alors $A \cap B = \emptyset$, donc $P(A \cap B) = 0$ et $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
Plus généralement, pour des événements deux à deux incompatibles : $P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$.

7.7 $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.

7.8 ★ Pour $P(A) \neq 0$: $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, d'où $P(A \cap B) = P(A) P_A(B)$.

7.9 ★ Dans le cas général, $P(A \cap B) = P(A) P_A(B) = P(B) P_B(A)$, dès que le conditionnement a un sens.

Si A et B sont indépendants, alors $P(A \cap B) = P(A) P(B)$.

Si A et B sont incompatibles, alors $P(A \cap B) = 0$.

Le produit $P(A)P(B)$ ne s'emploie jamais sans avoir justifié l'indépendance au préalable.

7.10 ★ Si $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$:

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Très utile pour des tirages **successifs sans remise**.

7.11 ★ Si $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet : $P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i)$;

et si de plus $P(A_i) \neq 0$: $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) P_{A_i}(B)$. Cas particulier : $P(B) = P(A) P_A(B) + P(\bar{A}) P_{\bar{A}}(B)$.

7.12 ★ $P_B(A_i) = \frac{P(A_i) P_{A_i}(B)}{\sum_{k=1}^n P(A_k) P_{A_k}(B)}$. Elle « inverse » le conditionnement : on connaît l'effet, on remonte à la cause.

7.13 Chaque branche porte la **probabilité conditionnelle** de l'événement auquel elle mène ;
la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1 ;
la probabilité d'un chemin est le **produit** des probabilités des branches qui le composent.

7.14 ★ A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) P(B)$. Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, c'est équivalent à $P_A(B) = P(B)$, ou à $P_B(A) = P(A)$. Si A et B sont indépendants, $(A, \bar{B})$, $(\bar{A}, B)$ et $(\bar{A}, \bar{B})$ le sont aussi.

7.15 Non. Incompatibles : $A \cap B = \emptyset$. Indépendants : $P(A \cap B) = P(A) P(B)$. Deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont jamais indépendants.

7.16 On passe par l'événement **contraire**, qui est « aucun... ».

$$P(\text{au moins un}) = 1 - P(\text{aucun}).$$

Si l'on répète n fois de façon indépendante une épreuve de probabilité de succès p , alors $P(\text{aucun succès}) = (1 - p)^n$.

$$\text{D'où } P(\text{au moins un succès}) = 1 - (1 - p)^n.$$

8.1 Une application de Ω dans $\mathbb{R}$. $X(\Omega)$ est l'ensemble (fini) des valeurs prises par X .

8.2 ★ La donnée de $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et des probabilités $P(X = x_i)$ pour chaque i . Vérification : $\sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1$ (les événements $[X = x_i]$ forment un système complet).

8.3 $F_X(x) = P(X \leq x)$, définie sur $\mathbb{R}$, croissante, en escalier ; elle caractérise la loi de X .

8.4 ★ $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$; $E(aX + b) = aE(X) + b$ et $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.

8.5 ★ $V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_i (x_i - E(X))^2 P(X = x_i) \geq 0$;
 $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$. La variance mesure la dispersion autour de l'espérance.

8.6 ★ $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$;
 $V(aX + b) = a^2 V(X)$ (attention : **pas** de b , et le a est **au carré**).

8.7 $n! = n(n-1) \cdots 2 \times 1$, avec $0! = 1$ et $(n+1)! = (n+1) \times n!$. C'est le nombre de **permutations** d'un ensemble à n éléments.

8.8 ★ Le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

8.9 ★ $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Conséquences : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ et $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

8.10 ★ $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$: $P(X = k) = \frac{1}{n}$ pour $k \in [1, n]$;
 $E(X) = \frac{n+1}{2}$;
 $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

8.11 ★ $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$: une épreuve à deux issues, $X = 1$ (succès, probabilité p) ou $X = 0$ (échec).
 $E(X) = p$, $V(X) = p(1-p)$.

8.12 ★ $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ compte le nombre de succès dans une répétition de n **épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes** (typiquement : tirages **avec remise**). $X(\Omega) = [0, n]$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$.

8.13 Nommer l'épreuve de Bernoulli, préciser le succès et sa probabilité p , justifier la **répétition**

de n fois de façon identique et indépendante, dire que X compte le nombre de succès, puis conclure $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Chapitre 9 — Suites numériques : limites

9.1 Tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang (donc tous sauf un nombre fini d'entre eux). La limite est alors unique.

9.2 Non : la suite de terme général $(-1)^n$ n'a pas de limite (elle oscille entre -1 et 1).

9.3 ★ $q > 1 : q^n \rightarrow +\infty$;
 $q = 1 : q^n \rightarrow 1$;
 $-1 < q < 1 : q^n \rightarrow 0$;
 $q \leq -1$: pas de limite.

9.4 ★ Si $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et si $v_n \rightarrow \ell$ et $w_n \rightarrow \ell$, alors (u_n) converge et $u_n \rightarrow \ell$.

9.5 ★ Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang : $u_n \rightarrow +\infty \Rightarrow v_n \rightarrow +\infty$;
 $v_n \rightarrow -\infty \Rightarrow u_n \rightarrow -\infty$.

9.6 ★ Toute suite croissante et majorée converge ;
toute suite décroissante et minorée converge.

9.7 ★ Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$ (symétriquement, décroissante non minorée $\rightarrow -\infty$). Le théorème donne l'existence de la limite, pas sa valeur : elle n'est pas forcément égale à M (on a seulement $\ell \leq M$).

Chapitre 10 — Limites et continuité : compléments

10.1 ★ Si f est continue et strictement monotone sur $[a, b]$, alors pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a, b]$.

Autrement dit, f réalise une bijection de $[a, b]$ sur l'intervalle image.

Cas particulier : si de plus $f(a)f(b) < 0$, alors 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]a, b[$.

10.2 On calcule $m = \frac{a+b}{2}$;

si $f(a)f(m) \leq 0$ la solution est dans $[a, m]$, sinon dans $[m, b]$. On recommence jusqu'à ce que la longueur de l'intervalle soit inférieure à la précision voulue (elle est divisée par 2 à chaque étape).

10.3

```
a, b = 0, 1
while b - a > 1e-3:
```

```

m = (a + b)/2
if f(a)*f(m) <= 0:
    b = m
else:
    a = m
print(a, b)

```

10.4 ★ Si f est continue et strictement monotone sur I , elle réalise une bijection de I sur $J = f(I)$;
 f^{-1} est continue, strictement monotone sur J , **de même sens de variation** que f , et les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Chapitre 11 — Fonctions logarithme et exponentielle

11.1 ★ L'unique primitive sur $]0; +\infty[$ de $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1. Donc $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et $\ln(1) = 0$ (et $\ln(e) = 1$).

11.2 ★ $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$: strictement croissante sur $]0; +\infty[$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ (asymptote verticale : l'axe des ordonnées) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$. Concave (car $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$).

11.3 ★ $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$;
 $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$;
 $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$;
 $\ln(a^n) = n \ln(a)$;
 $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$ (pour $a, b > 0$).

11.4 ★ D'abord le **domaine** ($u > 0, v > 0$). Puis : $\ln(u) = k \Leftrightarrow u = e^k$;
et comme $\ln$ est strictement croissante, $\ln(u) \leq \ln(v) \Leftrightarrow u \leq v$.

11.5 ★ $\exp$ est la **bijection réciproque** de $\ln$: elle est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0; +\infty[$, et $e^{\ln(x)} = x$ pour $x > 0$, $\ln(e^x) = x$ pour tout x . Les deux courbes sont symétriques par rapport à $y = x$.

11.6 ★ $e^{a+b} = e^a e^b$;
 $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$;
 $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$;
 $(e^a)^n = e^{na}$;
 $e^0 = 1$;
 $e^x > 0$ pour tout x .

11.7 ★ $(e^x)' = e^x > 0$: strictement croissante et convexe sur $\mathbb{R}$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ (asymptote horizontale $y = 0$) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

11.8 ★ $(e^u)' = u'e^u$; $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$ (sur un intervalle où $u > 0$).

11.9 ★ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln(x)} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$

Retenir : l'exponentielle l'emporte sur les puissances, qui l'emportent sur le logarithme.

Chapitre 12 — Systèmes linéaires

12.1 ★ $L_i \leftrightarrow L_j$: échange de deux lignes.

$L_i \leftarrow \alpha L_i$ avec $\alpha \neq 0$.

$L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$ avec $i \neq j$.

$L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$ avec $i \neq j$ et $\alpha \neq 0$.

12.2 ★ 1) Choisir un pivot non nul pour x_1 (au besoin échanger deux lignes pour le placer en L_1) ;
 2) éliminer x_1 dans toutes les autres lignes par $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}} L_1$;
 3) recommencer avec x_2 sur le sous-système restant, etc. ;
 4) résoudre le système triangulaire obtenu par **remontée**.

Chapitre 13 — Calcul matriciel

13.1 Un tableau rectangulaire de réels à n lignes et p colonnes. Matrice ligne : $n = 1$;
 matrice colonne : $p = 1$;
 matrice nulle $0_{n,p}$: tous les coefficients sont nuls.

13.2 Coefficient par coefficient, et **seulement si elles ont la même taille** : $(A+B)_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$
 et $(\lambda A)_{i,j} = \lambda a_{i,j}$.

13.3 ★ Il faut que le **nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B** : si $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}$, alors $AB \in \mathcal{M}_{n,q}$ et $c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$ (ligne i de A « fois » colonne j de B).

13.4 ★ Il n'est pas **commutatif** : en général $AB \neq BA$ (les deux produits peuvent même ne pas avoir la même taille, voire ne pas exister). Il n'est pas **intègre** : $AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$;
de même $AB = AC$ n'implique pas $B = C$.

13.5 La matrice carrée d'ordre n dont les coefficients diagonaux valent 1 et les autres 0. Pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $AI_n = I_nA = A$ (I_n est l'élément neutre du produit).

13.6 $A^0 = I_n$, $A^1 = A$, $A^p = A \times \cdots \times A$ (p facteurs). $A^p A^q = A^{p+q}$, $(A^p)^q = A^{pq}$. Et si $AB = BA$ alors $(AB)^p = A^p B^p$ — **uniquement** si elles commutent.

Chapitre 14 — Intégration sur un segment

14.1 ★ C'est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites verticales $x = a$ et $x = b$.

14.2 ★ F dérivable sur I avec $F' = f$ sur I . Toute fonction continue sur un intervalle y admet **au moins** une primitive, et si F en est une, les autres sont exactement les $F + c$, c constante réelle.

14.3 ★ $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, où F est **une** primitive quelconque de f sur un intervalle contenant a et b (le résultat ne dépend pas du choix de F).

14.4 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$: le nom de la variable d'intégration n'intervient pas dans le résultat (on évite seulement d'utiliser a ou b).

14.5 ★ $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ ($n \neq -1$) ;
 $\ln(|x|)$;
 $-\frac{1}{x}$;
 $2\sqrt{x}$;
 e^x (à une constante près, sur un intervalle adapté).

14.6 ★ $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ ($n \neq -1$) ; $\ln(|u|)$; e^u ; $2\sqrt{u}$.

Python et algorithmique

P.1

```
def u(n):
    v = 1
    for k in range(n):
        v = v**2 + 1
    return v
```

P.2★ **for** quand on connaît **à l'avance** le nombre de répétitions (sommes, produits, n premiers termes d'une suite) ;
while quand on répète **tant qu'une condition est vraie**, en particulier pour les recherches de seuil.

P.3

```
u = 1
n = 0
while u <= 1000:
    u = 1.5*u
    n = n + 1
print(n)
```

P.4 `def f(p1, ..., pn):` puis le corps **indenté**, et **return** qui renvoie le résultat (sans **return**, la fonction ne renvoie rien). Seules les instructions indentées appartiennent au bloc.

P.5

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x = np.linspace(-2, 4, 100)
y = f(x)
plt.plot(x, y)
plt.show()
```