

Mathématiques
Devoir maison numéro 1

Exercice 1 : ESC 2015

1. (a) • On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$

par croissances comparées (la puissance l'emporte sur le logarithme) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Donc, par somme,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

• On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$. De plus $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$,

donc par quotient $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$.

Par somme,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

(b) Pour tout $x > 0$, $f(x) - (x+1) = \frac{\ln(x)}{x}$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

Donc

la droite (D) d'équation $y = x+1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$

(c) La position de $\mathcal{C}$ par rapport à (D) est donnée par le signe de $f(x) - (x+1) = \frac{\ln(x)}{x}$.

Sur $]0, +\infty[$ on a :

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$		0	
x			
$f(x) - (x+1)$			

• Sur $]0, 1[$: $f(x) - (x+1) < 0$, soit $f(x) < x+1$, donc

$\mathcal{C}$ est en dessous de (D) sur $]0, 1[$

• Sur $]1, +\infty[$: $f(x) - (x+1) > 0$, soit $f(x) > x+1$, donc

$\mathcal{C}$ est au-dessus de (D) sur $]1, +\infty[$

(les deux courbes se coupent au point d'abscisse 1, où $\ln(1) = 0$.)

2. (a) La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}.$$

Or

$$2x^2 - 1 = 0 \iff x^2 = \frac{1}{2} \iff x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

et seule la seconde racine appartient à $]0, +\infty[$. Comme $x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $2x^2 - 1$:

x	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$2x^2 - 1$		-	+
x		+	+
$g'(x)$		-	+
g	$+\infty$	$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$+\infty$

Ainsi

$$g \text{ est décroissante sur } \left]0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \text{ et croissante sur } \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$$

(b) On calcule

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + 1 + \ln(\sqrt{2}),$$

et comme $\ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \ln(2)$:

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \ln(2)$$

• Comme $2 > 1$, on a $\ln(2) > 0$, donc $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \ln(2) > 0$.

• D'après le tableau de variations, g admet $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ pour minimum sur $]0, +\infty[$. Ce minimum étant strictement positif,

$$g \text{ est strictement positive sur }]0, +\infty[$$

(c) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, en dérivant le quotient $\frac{\ln(x)}{x}$:

$$f'(x) = 1 + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = 1 + \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - \ln(x)}{x^2},$$

soit

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

- (d) Sur $]0, +\infty[$, $g(x) > 0$ d'après la question 2.(b) et $x^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$: la fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Avec les limites de la question 1.(a) :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	
f	$-\infty$	0	$+\infty$

3. La tangente (T) à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 a pour équation

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1).$$

Or

$$f(1) = 1 + 1 + \frac{\ln(1)}{1} = 2 \quad \text{et} \quad f'(1) = \frac{g(1)}{1^2} = \frac{1^2 + 1 - \ln(1)}{1^2} = 2.$$

D'où $y = 2(x - 1) + 2$, c'est-à-dire

$$(T) : y = 2x$$

4. (a) Sur $]0, +\infty[$, f est continue et strictement croissante, et

$$f(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[=]-\infty, +\infty[.$$

Comme 0 appartient à cet intervalle image, le théorème de la bijection donne

$$\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur }]0, +\infty[$$

- (b) On calcule

$$f(1) = 2, \quad f(\alpha) = 0, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + 1 + \frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3} - 3\ln(3).$$

Avec $\ln(3) \approx 1,1$:

$$f\left(\frac{1}{3}\right) \approx \frac{4}{3} - 3 \times 1,1 \approx 1,33 - 3,3 \approx -2,03 < 0.$$

On a donc

$$f\left(\frac{1}{3}\right) < f(\alpha) < f(1),$$

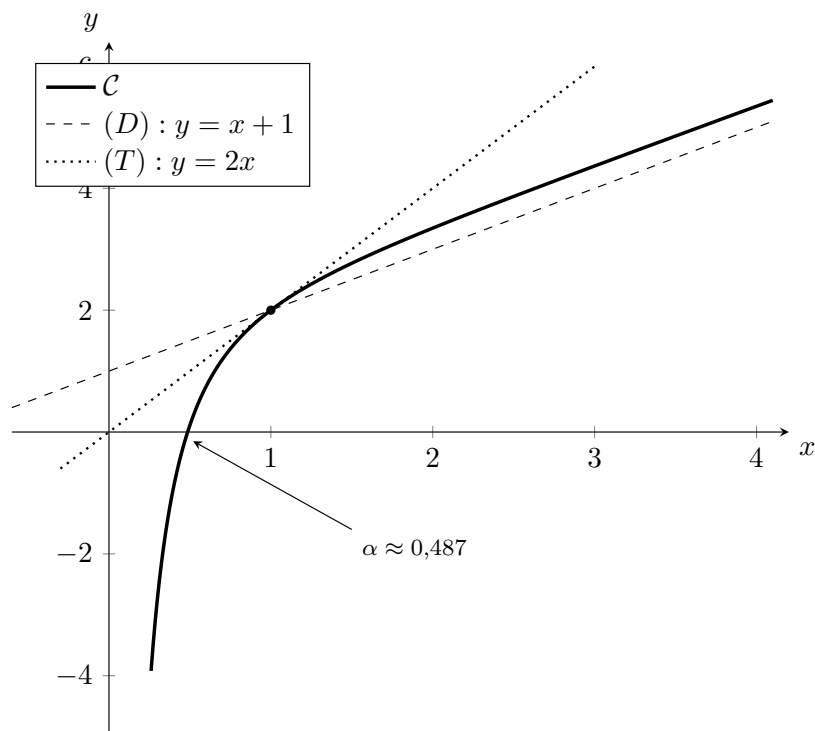
et comme f est strictement croissante, elle conserve l'ordre :

$$\frac{1}{3} < \alpha < 1$$

- (c) Le programme détermine par dichotomie une valeur approchée de α à 0,001 près : à chaque tour de boucle, l'intervalle $[a, b]$ contenant α est divisé par deux, et la boucle s'arrête lorsque $b - a \leq 0,001$. Donc

$$0,4869792 \text{ est une valeur approchée de } \alpha \text{ à } 0,001 \text{ près, i.e. } |\alpha - 0,4869792| \leq 0,001$$

5. Allure de $\mathcal{C}$, de son asymptote (D) et de la tangente (T) au point d'abscisse 1 :



6. (a) Le programme complété est le suivant :

```
1. import numpy as np
2. n=int(input('entrer la valeur de n :'))
3. u=1
4. for k in range(1,n+1) :
5.     u=u+1+np.log(u)/u
6. print(u)
```

(b) Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $u_n \geq n + 1$ ».

Initialisation : $u_0 = 1$ et $0 + 1 = 1$, donc $u_0 \geq 0 + 1$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier $n \geq 0$ pour lequel la propriété est vraie, c'est-à-dire $u_n \geq n + 1$. Comme f est croissante sur $]0, +\infty[$,

$$f(u_n) \geq f(n+1), \quad \text{avec} \quad f(u_n) = u_{n+1} \quad \text{et} \quad f(n+1) = n+1+1+\frac{\ln(n+1)}{n+1} = n+2+\frac{\ln(n+1)}{n+1}.$$

Or $n + 1 \geq 1$, donc $\ln(n + 1) \geq 0$ et $\frac{\ln(n + 1)}{n + 1} \geq 0$. Ainsi

$$u_{n+1} \geq n + 2 + \frac{\ln(n + 1)}{n + 1} \geq n + 2 = (n + 1) + 1,$$

et $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : d'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq n + 1}$$

(c) • Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n + 1 + \frac{\ln(u_n)}{u_n}, \quad \text{donc} \quad u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{\ln(u_n)}{u_n}.$$

Or $u_n \geq n + 1$, en particulier $u_n \geq 1$, donc $\ln(u_n) \geq 0$ et $\frac{\ln(u_n)}{u_n} \geq 0$. Ainsi $u_{n+1} - u_n \geq 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq u_n$:

la suite (u_n) est croissante

• De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 1) = +\infty$ et $u_n \geq n + 1$, donc par comparaison

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

Exercice 2 : Ecricome 2011

1. Domaine, parité et limites

(a) • La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$:

$$D_f = \mathbb{R}$$

• L'ensemble de définition de f est symétrique par rapport à 0.
Soit $x \in \mathbb{R}$; alors $-x \in \mathbb{R}$ et

$$f(-x) = e^{-x} - e^{-(-x)} = e^{-x} - e^x = -(e^x - e^{-x}),$$

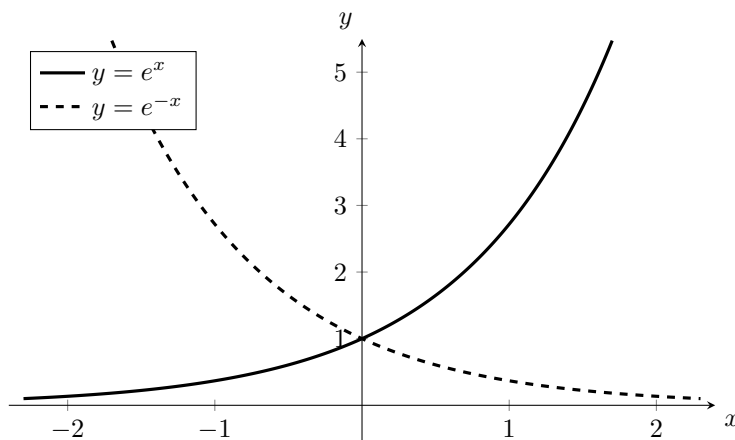
soit

$$f(-x) = -f(x)$$

La fonction f est donc impaire, et sa courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

(b) • On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, donc par différence

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



2. Variations et signe de f

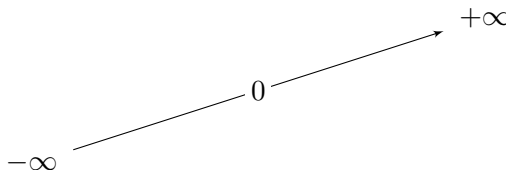
(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est dérivable comme différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et

$$f'(x) = e^x - (-e^{-x}), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{f'(x) = e^x + e^{-x}}$$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$, donc $f'(x) > 0$: la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus f est impaire, donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		
f			

(c) On a

$$f(0) = e^0 - e^{-0} = 1 - 1 = 0.$$

Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0, elle est strictement négative avant 0 et strictement positive après :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

(d) La tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 a pour équation

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0),$$

avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = e^0 + e^{-0} = 1 + 1 = 2$. Donc

$$\boxed{(T) : y = 2x}$$

3. Convexité et tracé

(a) La courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion en $(a, f(a))$ si f'' s'annule et change de signe en a .
Or f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{f''(x) = e^x - e^{-x} = f(x)}$$

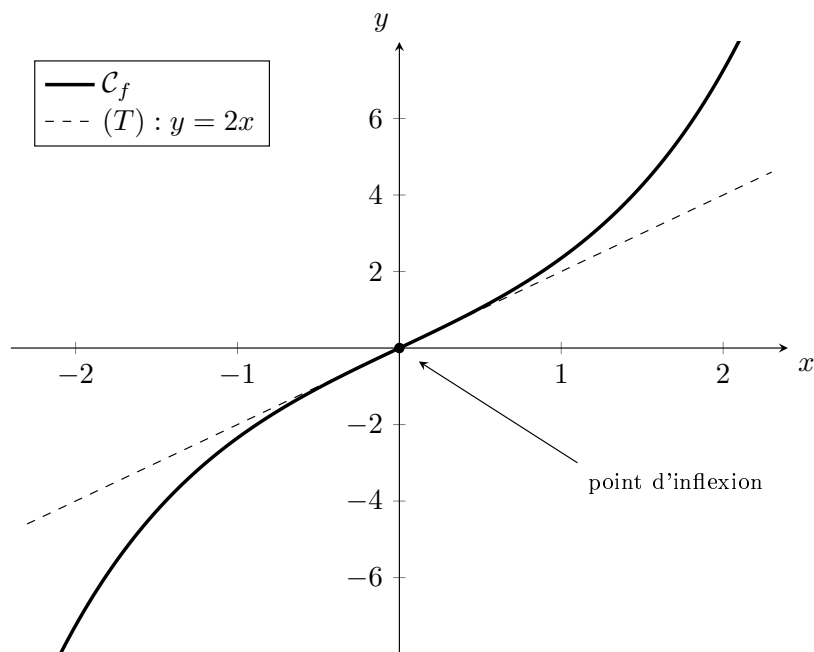
Donc f'' est du signe de f , déterminé à la question 2.(c) :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
convexité de f	f concave		f convexe

- f'' s'annule et change de signe en 0, donc

le point de coordonnées $(0, 0)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$

- Sur $] -\infty, 0[$, $f''(x) < 0$ et f est concave ; sur $] 0, +\infty[$, $f''(x) > 0$ et f est convexe.
- (b) Le point d'inflexion étant en 0, la courbe $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente (T) en ce point : elle est au-dessous de (T) sur $] -\infty, 0[$ et au-dessus sur $] 0, +\infty[$.



4. Résolution de l'équation $(E_n) : f(x) = n$

- (a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty :$$

elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Comme $n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, n appartient à l'intervalle image et

l'équation $(E_n) : f(x) = n$ admet une unique solution, notée u_n

Pour $n = 0$, l'équation (E_0) s'écrit $f(x) = 0$. Or $f(0) = 0$, donc

$$u_0 = 0$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant $e^{\ln(a)} = a$ pour $a > 0$:

$$f(\ln(n)) = e^{\ln(n)} - e^{-\ln(n)} = n - e^{\ln(\frac{1}{n})} = n - \frac{1}{n},$$

$$f(\ln(2n)) = e^{\ln(2n)} - e^{-\ln(2n)} = 2n - \frac{1}{2n}$$

soit

$$f(\ln(n)) = n - \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad f(\ln(2n)) = 2n - \frac{1}{2n}$$

Pour $n \geq 1$ on a $n - \frac{1}{n} \leq n$, et $2n - \frac{1}{2n} \geq n \iff n \geq \frac{1}{2n} \iff 2n^2 \geq 1$, ce qui est vrai.
Donc

$$n - \frac{1}{n} \leq n \leq 2n - \frac{1}{2n}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(\ln(n)) \leq f(u_n) \leq f(\ln(2n)).$$

Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle conserve l'ordre et sa réciproque également, d'où

$$\boxed{\ln(n) \leq u_n \leq \ln(2n)}$$

Enfin $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$, donc par comparaison

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}$$

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. L'équation $x^2 - nx - 1 = 0$ est une équation du second degré d'inconnue x .
Son discriminant vaut

$$\Delta = (-n)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = n^2 + 4 > 0,$$

donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$\boxed{x_1 = \frac{n - \sqrt{n^2 + 4}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}}$$

Comme $n^2 + 4 > n^2$ et $n \geq 0$, on a $\sqrt{n^2 + 4} > n$, donc

$$\boxed{x_1 < 0 \quad \text{et} \quad x_2 > 0}$$

- (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $e^x > 0$, on peut multiplier par e^x sans changer les solutions :

$$\begin{aligned} (E_n) &\iff e^x - e^{-x} = n \iff e^x - e^{-x} - n = 0 \\ &\iff e^x (e^x - e^{-x} - n) = 0 \\ &\iff (e^x)^2 - e^x \times e^{-x} - n e^x = 0 \\ &\iff (e^x)^2 - n e^x - 1 = 0 \quad (\text{car } e^x \times e^{-x} = 1). \end{aligned}$$

En posant $t = e^x$, l'équation devient $t^2 - nt - 1 = 0$, dont les solutions ont été déterminées à la question précédente. Donc

$$(E_n) \iff e^x = \frac{n - \sqrt{n^2 + 4}}{2} \quad \text{ou} \quad e^x = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}.$$

Or $\frac{n - \sqrt{n^2 + 4}}{2} < 0$ et une exponentielle est strictement positive : la première équation n'a pas de solution. Il reste

$$(E_n) \iff e^x = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2} \iff x = \ln \left(\frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2} \right),$$

d'où

$$\boxed{u_n = \ln \left(\frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2} \right)}$$

On retrouve bien $u_0 = \ln \left(\frac{0 + 2}{2} \right) = \ln(1) = 0$.

Exercice 3 : Ecricome 2012

1. Étude de $(u_n)_{n \geq 0}$

(a) Le programme complété est le suivant :

```
1. n=int(input('entrer la valeur de n :'))
2. u=float(input('entrer la valeur de u0 :'))
3. for k in range(1,n+1):
4.     u=u**2/(2*u-1)
5. print(u)
```

(b) Soit $x \geq 1$.

• $1 \leq f(x) \iff f(x) - 1 \geq 0$. Or

$$f(x) - 1 = \frac{x^2}{2x-1} - 1 = \frac{x^2 - (2x-1)}{2x-1} = \frac{x^2 - 2x + 1}{2x-1} = \frac{(x-1)^2}{2x-1}.$$

Si $x \geq 1$, alors $(x-1)^2 \geq 0$ et $2x-1 > 0$, donc $f(x) - 1 \geq 0$ et

$$\boxed{1 \leq f(x)}$$

• $f(x) \leq \frac{x+1}{2} \iff \frac{x+1}{2} - f(x) \geq 0$. Or

$$\frac{x+1}{2} - f(x) = \frac{x+1}{2} - \frac{x^2}{2x-1} = \frac{(x+1)(2x-1) - 2x^2}{2(2x-1)} = \frac{2x^2 - x + 2x - 1 - 2x^2}{2(2x-1)} = \frac{x-1}{2(2x-1)}.$$

Si $x \geq 1$, alors $x-1 \geq 0$ et $2x-1 > 0$, donc $\frac{x+1}{2} - f(x) \geq 0$ et

$$\boxed{f(x) \leq \frac{x+1}{2}}$$

(c) Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $u_n \geq 1$ ».

Initialisation : $u_0 \in [1, +\infty[$ donc $u_0 \geq 1$, et la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier $n \geq 0$ pour lequel la propriété est vraie, et montrons qu'elle l'est encore au rang $n+1$. Par hypothèse de récurrence $u_n \geq 1$, donc d'après la question 1.(b), $f(u_n) \geq 1$. Or $f(u_n) = u_{n+1}$, donc $u_{n+1} \geq 1$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : d'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n \geq 1$, l'inégalité de la question 1.(b) appliquée à $x = u_n$ donne $f(u_n) \leq \frac{u_n+1}{2}$, soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq \frac{u_n+1}{2}}$$

(d) Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $1 \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{2^n}(u_0 - 1)$ ».

Initialisation : $u_0 \geq 1$ et

$$1 + \frac{1}{2^0}(u_0 - 1) = 1 + u_0 - 1 = u_0,$$

donc $1 \leq u_0 \leq 1 + \frac{1}{2^0}(u_0 - 1)$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : supposons la propriété vraie au rang n et montrons qu'elle l'est encore au rang $n + 1$. Par hypothèse de récurrence

$$1 \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{2^n}(u_0 - 1),$$

d'où, en ajoutant 1 :

$$2 \leq u_n + 1 \leq 2 + \frac{1}{2^n}(u_0 - 1),$$

puis, en divisant par 2 :

$$1 \leq \frac{u_n + 1}{2} \leq 1 + \frac{1}{2^{n+1}}(u_0 - 1).$$

Or $u_{n+1} \leq \frac{u_n + 1}{2}$ et $u_{n+1} \geq 1$ d'après la question 1.(c), donc

$$1 \leq u_{n+1} \leq 1 + \frac{1}{2^{n+1}}(u_0 - 1)$$

et la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{2^n}(u_0 - 1)$$

(e) On utilise l'encadrement précédent.

D'une part $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$.

D'autre part $\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ avec $-1 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}(u_0 - 1)\right) = 1.$$

D'après le théorème d'encadrement, (u_n) converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

2. Asymptote à $\mathcal{C}_f$

(a) Il s'agit d'une forme indéterminée que l'on lève en factorisant par les termes de plus haut degré :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty, \quad \text{soit}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

(b) • Pour $x > 0$,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^2}{2x-1}}{x} = \frac{x^2}{x(2x-1)} = \frac{x}{2x-1},$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}, \quad \text{soit} \quad \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

• Ensuite

$$f(x) - ax = f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{x^2}{2x-1} - \frac{1}{2}x = \frac{x^2 - \frac{1}{2}x(2x-1)}{2x-1} = \frac{x^2 - x^2 + \frac{1}{2}x}{2x-1} = \frac{\frac{1}{2}x}{2x-1},$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2}x}{2x} = \frac{1}{4}, \quad \text{soit} \quad \boxed{b = \frac{1}{4}}$$

(c) Pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$f(x) - ax - b = f(x) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{2}x}{2x-1} - \frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}(2x-1)}{2x-1} = \frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}}{2x-1} = \frac{\frac{1}{4}}{2x-1},$$

donc un tel réel c existe et

$$\boxed{c = \frac{1}{4}}$$

(d) De ce qui précède,

$$f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right) = \frac{\frac{1}{4}}{2x-1}, \quad \text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{4}}{2x} = 0.$$

Donc

$$\boxed{\text{la droite } (D) \text{ d'équation } y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \text{ est asymptote oblique à } \mathcal{C}_f \text{ en } +\infty}$$

Pour obtenir la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D) , on étudie le signe de $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right)$,
c'est-à-dire de $\frac{1/4}{2x-1}$.

Or, sur $[1, +\infty[$, $\frac{1}{4} > 0$ et $2x-1 > 0$, donc $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right) > 0$ et

$$\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de } (D)}$$

3. Variations de f

(a) Soit $x \in [1, +\infty[$. La fonction f est un quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1, +\infty[$, donc f est dérivable et

$$f'(x) = \frac{2x(2x-1) - x^2 \times 2}{(2x-1)^2} = \frac{4x^2 - 2x - 2x^2}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x}{(2x-1)^2},$$

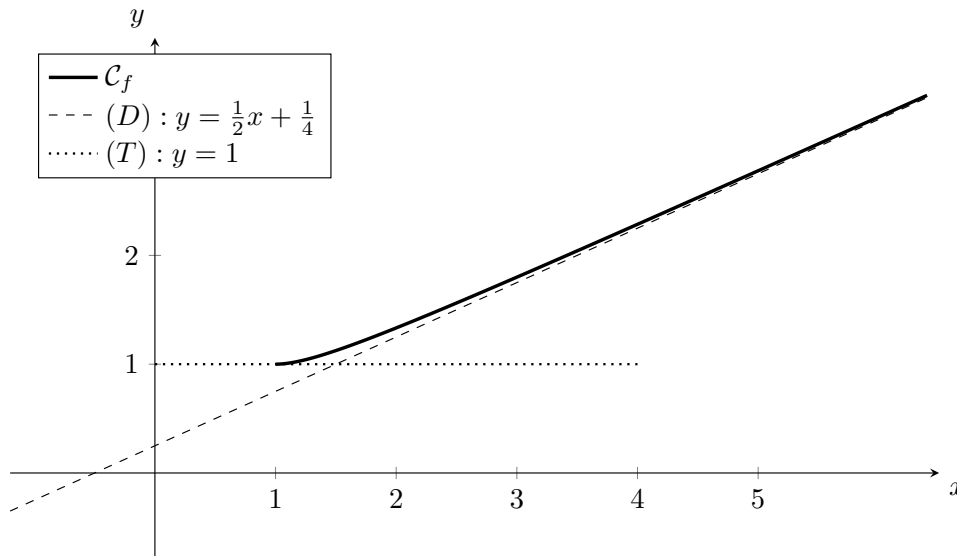
soit

$$\boxed{f'(x) = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}}$$

(b) Sur $[1, +\infty[$ on a $2x > 0$, $x - 1 \geq 0$ et $(2x - 1)^2 > 0$, donc

$$f'(x) \geq 0 \text{ et } f \text{ est croissante sur } [1, +\infty[$$

(c) La tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$, avec $f(1) = 1$ et $f'(1) = 0$: c'est la droite horizontale d'équation $y = 1$.



4. Étude d'une réciproque

(a) f est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$, avec $f(1) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Donc f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur

$$f([1, +\infty[) = [1, +\infty[$$

(b) Soit $t \geq 1$. L'équation $x^2 - 2tx + t = 0$ est une équation du second degré d'inconnue x . Son discriminant vaut

$$\Delta = (-2t)^2 - 4 \times 1 \times t = 4t^2 - 4t = 4t(t - 1).$$

Comme $t \geq 1$, on a $t - 1 \geq 0$ et $t > 0$, donc $\Delta \geq 0$: l'équation admet deux solutions réelles (confondues si $\Delta = 0$, c'est-à-dire si $t = 1$) :

$$x_1 = \frac{2t - \sqrt{4t(t-1)}}{2} = \frac{2t - 2\sqrt{t(t-1)}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2t + \sqrt{4t(t-1)}}{2},$$

soit

$$x_1 = t - \sqrt{t(t-1)} \quad \text{et} \quad x_2 = t + \sqrt{t(t-1)}$$

(c) Soient $t \geq 1$ et $x \geq 1$. Comme $2x - 1 > 0$:

$$f(x) = t \iff \frac{x^2}{2x-1} = t \iff x^2 = t(2x-1) \iff x^2 - 2tx + t = 0.$$

D'après la question précédente, les seules solutions possibles sont x_1 et x_2 .

Or leur produit vaut $x_1 x_2 = t$ et $x_2 = t + \sqrt{t(t-1)} \geq t$, donc $x_1 = \frac{t}{x_2} \leq 1$, avec égalité seulement si $t = 1$: l'autre solution est strictement inférieure à 1 dès que $t > 1$.

Ainsi l'unique réel $x \in [1, +\infty[$ tel que $f(x) = t$ est

$$x = t + \sqrt{t(t-1)}$$