

Mathématiques
Devoir maison numéro 1

A rendre le vendredi 11 septembre 2026

Exercice 1

On considère les fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{\ln(x)}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 + 1 - \ln(x)$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
(b) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe de f .
(c) Montrer que $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{D}$ sur $[1, +\infty[$ et en dessous de $\mathcal{D}$ sur $]0, 1]$.
2. (a) Calculer la dérivée de g . En déduire le sens de variation de g sur $]0, +\infty[$.
(b) Montrer que $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln(2)$. En déduire que $g(x)$ est positif strictement sur $]0, +\infty[$.
(c) Montrer que la dérivée de f vérifie pour tout réel x strictement positif : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
(d) Déduire des questions précédentes le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites trouvées en 1.a)
3. Donner l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
4. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$ notée α .
(b) Justifier que $\frac{1}{3} < \alpha < 1$ (on donne $\ln(3) \approx 1.1$)
(c) On considère le programme Python suivant :

```
1. import numpy as np
2. a=1/3
3. b=1
4. while (b-a)>0.001:
5.     c=(a+b)/2
6.     if (c+1+np.log(c)/c)<0 :
7.         a=c
8.     else :
9.         b=c
10. print(c)
```

On exécute ce programme. Le résultat affiché est 0.4869792

Quelle est la signification de ce résultat ?

5. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ dans un repère orthonormé d'unité 2cm. On fera également figurer la tangente $\mathcal{T}$.
- On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .
6. (a) Compléter le programme *Python* suivant pour qu'il calcule et affiche u_n , pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
1. import numpy as np
2. n=int(input('entrer la valeur de n :'))
3. u=...
4. for k in range(...):
5.     u=...
6. print(u)
```

- (b) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n \geq n + 1$.
- (c) Déterminer le sens de variation et la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 2

Le but de cet exercice est l'étude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout réel } x, \quad f(x) = e^x - e^{-x}$$

et la résolution d'une équation. On note C_f la courbe représentative de f .

1. (a) (a) Donner le domaine de définition de f et étudier la parité de f .
(b) Donner les valeurs suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
2. (a) Calculer $f'(x)$ pour x réel.
(b) Construire le tableau de variation de f .
(c) Après avoir calculé $f(0)$, déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel x .
(d) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0.
On note cette droite T .
3. (a) Montrer que la courbe C_f admet un point d'inflexion que l'on précisera et étudier la convexité de f .
(b) Construire sur un même schéma C_f et T .
4. Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère dans cette question l'équation (E_n) d'inconnue x :

$$f(x) = n.$$

- (a) Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution notée u_n (on ne cherchera pas ici à calculer u_n).
Préciser la valeur de u_0 .
- (b) Soit n un entier naturel non nul, calculer $f(\ln(n))$ et $f(\ln(2n))$.
En déduire que $\ln(n) \leq u_n \leq \ln(2n)$.
Quelle est la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?
- (c) Soit n un entier naturel. Montrer que l'équation : $x^2 - nx - 1 = 0$ admet deux solutions réelles que l'on déterminera et dont on précisera les signes.
- (d) A l'aide du changement de variable $t = e^x$, déterminer la solution u_n de l'équation (E_n) pour n entier naturel.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. On définit également la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par :

$$u_0 \in [1, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Etude de $(u_n)_{n \geq 0}$

- (a) Compléter le programme **Python** suivant afin qu'il calcule et affiche la valeur de u_n , l'entier n et le réel u_0 étant donnés par l'utilisateur :

```
1. n=int(input('entrer la valeur de n :'))
2. u=float(input('entrer la valeur de u0 :'))
3. for i in range (...):
4.     u=...
5. print(u)
```

- (b) Soit $x \geq 1$. Etablir les inégalités suivantes : $1 \leq f(x)$ et $f(x) \leq \frac{x+1}{2}$.

- (c) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n$.

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq \frac{u_n + 1}{2}$.

- (d) Prouver par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{2^n}(u_0 - 1)$.

- (e) Démontrer la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ et donner la valeur de sa limite.

2. Asymptote à $\mathcal{C}_f$

On pose $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$

- (a) Donner la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- (b) Calculer a et b .

- (c) Montrer qu'il existe un réel c tel que :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x) - ax - b = \frac{c}{2x-1}$$

et donner la valeur de c .

- (d) Prouver que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote $(\mathcal{D})$ dont on donnera une équation ainsi que la position de $(\mathcal{D})$ par rapport à $\mathcal{C}_f$.

3. Variations de f

- (a) Soit $x \in [1, +\infty[$. Calculer $f'(x)$.

- (b) Préciser le sens de variation de f sur $[1, +\infty[$.

- (c) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ ainsi que la droite $(\mathcal{D})$ et la tangente $(\mathcal{T})$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

4. Etude d'une réciproque

- (a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.

- (b) Soit $t \in [1, +\infty[$. Prouver que l'équation $x^2 - 2tx + t = 0$ (d'inconnue x) admet des solutions réelles et les donner.

- (c) Soit $t \in [1, +\infty[$. Déterminer l'unique réel $x \in [1, +\infty[$ tel que $f(x) = t$.