

Suites réelles : suites de références - sommes

1 Définitions

1.1 Suites réelles

Une suite numérique est une liste infinie de nombres réels dont chaque terme est numéroté : à chaque rang $n \in \mathbb{N}$ correspond un terme numéro n de la suite.

On retrouve la notion de fonction numérique, mais avec une variable n entière.

Définition

Soit n_0 un entier naturel donné.

Une suite numérique u est une fonction qui, à tout entier $n \geq n_0$ associe un nombre réel noté $u(n)$ ou u_n .

$$u \left(\begin{array}{ccc} \{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n \end{array} \right)$$

Remarques :

- La suite u est la suite de terme général u_n . Elle est notée (u_n) ou $(u_n)_{n \geq n_0}$. Elle est définie à partir du rang n_0 .
- u_{n_0} est le terme initial (premier terme) de la suite, u_n le terme de rang n .
- La plupart du temps $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$

Exemple :

On considère la suite $u = (2^n)_{n \geq 4}$.

Le premier terme est $u_4 = 2^4 = 16$

Pour $n \geq 4$, le terme de rang n est $u_n = 2^n$:

$$u_{10} = 2^{10} = 1024 \quad u_{20} = 2^{20} = 1048576$$

Le terme de rang $n + 1$ est $u_{n+1} = 2^{n+1}$.

$$\text{Or } 2^{n+1} = 2 \times 2^n \text{ donc } u_{n+1} = 2 \times u_n$$

Une suite peut être déterminée :

- de façon explicite :

Soit f une fonction définie sur $[0; +\infty[$.

On peut définir la suite u en posant pour tout $n \geq 0$ $u_n = f(n)$

Le terme de rang n peut être calculé directement.

exemples :

1. Soit u la suite définie pour $n \geq 2$ par

$$u_n = \sqrt{2n-3}$$

On a donc

$$u_2 = \sqrt{2 \times 2 - 3} = 1 \quad u_3 = \sqrt{2 \times 3 - 3} = \sqrt{3} \quad u_{n+1} = \sqrt{2(n+1) - 3} = \sqrt{2n-1}.$$

2. Soit u la suite définie pour $n \geq 0$ par

$$u_n = \frac{2n-1}{n+1}$$

Le premier terme est $u_0 = \frac{2 \times 0 - 1}{0 + 1} = -1$.

Le terme de rang 12 vaut $u_{12} = \frac{2 \times 12 - 1}{12 + 1} = \frac{23}{13}$.

Si $n \geq 1$, le terme de rang $n-1$ vaut

$$u_{n-1} = \frac{2(n-1) - 1}{(n-1) + 1} = \frac{2n-3}{n}$$

- par la donnée de ses premiers termes et par une formule de récurrence :

On donne alors les valeurs des premiers termes de la suite et une "règle" qui permet de calculer le terme suivant en fonction des précédents.

Les termes de la suite se calculent alors de proche en proche.

Pour calculer le terme de rang 17, il faut alors avoir calculé tous les termes précédents.

exemples :

1. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{2u_n + 1} \end{cases}$$

On a alors :

$$u_1 = \frac{u_0 + 3}{2u_0 + 1} = \frac{1 + 3}{2 \times 1 + 1} = \frac{4}{3}, \quad u_2 = \frac{u_1 + 3}{2u_1 + 1} = \frac{\frac{4}{3} + 3}{2 \times \frac{4}{3} + 1} = \frac{\frac{13}{3}}{\frac{11}{3}} = \frac{13}{11}$$

2. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

On a alors :

$$u_2 = u_1 + u_0 = 1 + 1 = 2, \quad u_3 = u_2 + u_1 = 2 + 1 = 3, \quad u_4 = u_3 + u_2 = 3 + 2 = 5, \quad u_5 = u_4 + u_3 = 5 + 3 = 8$$

3. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_{n-1} + n \end{cases}$$

On a alors

$$u_1 = u_0 + 1 = 1, \quad u_2 = u_1 + 2 = 1 + 2 = 3, \quad u_3 = u_2 + 3 = 1 + 2 + 3 = 6, \quad u_4 = u_3 + 4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

plus généralement on peut montrer que

$$\text{pour tout } n \geq 1, \quad u_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

1.2 Opérations sur les suites

Les opérations usuelles sur les fonctions numériques d'une variable réelle s'appliquent aux suites numériques :

Si u et v sont deux suites numériques et λ un réel

- $u + v$ est la suite de terme général $u_n + v_n$,
- $u \times v$ est la suite de terme général $u_n \times v_n$,
- λu est la suite de terme général λu_n .
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$, $\frac{u}{v}$ est la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$.

2 Suites de références

2.1 Suites constantes : $u_{n+1} = u_n$

Définition

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite.
on dit que $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite constante si

$$\text{pour tout } n \geq n_0, \quad u_{n+1} = u_n$$

Proposition

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite constante.

$$\text{pour tout } n \geq n_0, \quad u_n = u_{n_0}$$

Exercice 1 :

On note $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les deux suites définies par : $p_0 = 1$, $q_0 = 2$, et pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$\begin{cases} p_{n+1} = 2p_n + q_n \\ q_{n+1} = p_n + 2q_n \end{cases}$$

On introduit la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par : $r_n = p_n - q_n$.

Montrer que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

En déduire la valeur de r_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

2.2 Suites arithmétiques : $u_{n+1} = u_n + r$

2.2.1 Définition, expression du terme u_n en fonction de n

Définition

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite.
on dit que $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite arithmétique s'il existe un réel r tel que

$$\text{pour tout } n \geq n_0, \quad u_{n+1} = u_n + r$$

alors r est appelé la raison de la suite et u_{n_0} son premier terme.

Exemples :

1. La suite (u_n) des nombres entiers naturels impairs est une suite arithmétique de raison 2 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2$.
2. La suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - 5 \end{cases}$ est une suite arithmétique de raison -5.

Remarques :

- On a pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} - u_n = r$ constant ie la différence de deux termes consécutifs ne dépend pas de n .
- Dans la pratique, pour montrer qu'une suite est arithmétique, il suffit de vérifier que $u_{n+1} - u_n$ est constant.

Exercice 2 :

Déterminer si les suites (u_n) et (v_n) suivantes sont arithmétiques.

Si oui, préciser leur raison.

1. la suite (u_n) est définie pour tout entier $n \geq 0$ par $u_n = 7 - 6n$
2. la suite (v_n) est définie pour tout entier $n \geq 0$ par $v_n = n^2 - n$

On passe du terme de rang n au terme de rang $n + 1$ en ajoutant la raison r .

$$\underbrace{u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \xrightarrow{+r} \dots u_{n-1} \xrightarrow{+r} u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1}}_{+n \times r}$$

On alors $u_2 = u_0 + 2r$, $u_3 = u_0 + 3r$

Proposition

Soit $r \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r .

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + n \times r.$$

Plus généralement

$$\text{pour } n \geq p, \quad u_n = u_p + (n - p)r$$

Remarques :

- Pour passer de u_0 à u_n on doit ajouter n fois la raison à u_0 .
Pour passer de u_p à u_n on doit ajouter $(n - p)$ fois la raison à u_p .
Par exemple $u_{10} = u_4 + 6r$.
-

$$u_{n-1} \xrightarrow{+r} u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1} \quad \text{donc } u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$$

chaque terme est la moyenne arithmétique du terme qui le précède et du terme qui le suit.

Exercice 3 :

Dans chacun des cas suivants (u_n) est une suite arithmétique. Exprimer u_n en fonction de n .

1. Le premier terme est $u_0 = -1$ et la raison est 0,5.
2. Le premier termes est $u_1 = 2$ et la raison est $\sqrt{2}$.
3. $u_3 = 1$ et $u_7 = -2$.

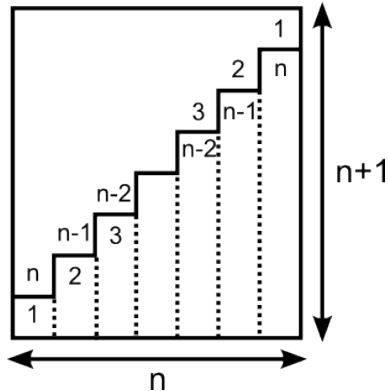
2.2.2 Somme de n termes consécutifs

Proposition : somme des n premiers entiers :

Pour tout entier naturel n

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration géométrique :



La somme des aires de rectangles qui valent respectivement $1, 2, \dots, n$ est égale à la moitié de celle du rectangle de côtés n et $n+1$.

Proposition (Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique)

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}.$$

Remarque :

Plus généralement la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par :

$$(\text{nombre de termes}) \times \left(\frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} \right).$$

Démonstration

On pose

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n \\ S_n &= u_n + u_{n-1} + \cdots + u_0 \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre on obtient

$$2S_n = (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + \cdots + (u_n + u_0)$$

$$u_1 = u_0 + r \text{ et } u_{n-1} = u_0 + (n-1)r = u_n - r \text{ donc } u_1 + u_{n-1} = u_0 + u_n$$

$$u_2 = u_0 + 2r \text{ et } u_{n-2} = u_0 + (n-2)r = u_n - 2r \text{ donc } u_2 + u_{n-2} = u_0 + u_n$$

D'où

$$2S_n = \underbrace{(u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + \cdots + (u_0 + u_n)}_{n+1 \text{ termes}} = (n+1)(u_0 + u_n)$$

et

$$S_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Exercice 4 :

Donner la somme des 100 premiers nombres impairs.

Exercice 5 :

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 3.

Calculer la somme $S = u_2 + u_3 + \dots + u_{10}$.

Exercice 6 :

Afin de pouvoir s'acheter une tablette de la dernière génération, Marion décide de mettre de côté une certaine somme chaque mois pendant 12 mois : 50 € le premier mois et, d'un mois à l'autre, le montant est diminué chaque fois de 4€.

On note u_n la somme mise de côté le n -ième mois.

1. Démontrer que u_n est une suite arithmétique et donner sa raison et son premier terme.
2. Exprimer u_n en fonction de n et en déduire u_{12} .
3. Au bout de 12 mois, Marion pourra-t-elle acheter une tablette valant 330€ ?

2.3 Suites géométriques : $u_{n+1} = q \times u_n$

2.3.1 Définition, expression du terme u_n en fonction de n

Définition

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite.

on dit que $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite géométrique s'il existe un réel q tel que

$$\text{pour tout } n \geq n_0, \quad u_{n+1} = u_n \times q$$

alors q est appelé la raison de la suite et u_{n_0} son premier terme.

Exemples :

1. La suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$ est une suite géométrique de raison 3.
2. Une ville peuplée de 800 habitants voit sa population augmenter de 5% par an.
Donc chaque année sa population est multipliée par 1.05.
Soit u_n la population de la ville la n -ième année. La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1.05.

Remarques :

- Si $q = 1$ la suite est constante.
- On a pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ constant ie le quotient de deux termes consécutifs ne dépend pas de n
- Dans la pratique, pour montrer qu'une suite est géométrique on cherchera à trouver une constante q telle que $u_{n+1} = q \times u_n$.

Exercice 7 :

Déterminer si les suites (u_n) et (v_n) suivantes sont géométriques. Si oui, préciser leur raison.

1. la suite (u_n) est définie pour tout $n \geq 0$ par $u_n = 3^{2n+1}$
2. la suite (v_n) est définie pour tout $n \geq 0$ par $v_n = n \times 2^n$

On passe du terme de rang n au terme de rang $n + 1$ en multipliant par la raison q .

$$\underbrace{u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} u_3 \xrightarrow{\times q} \dots u_{n-1} \xrightarrow{\times q} u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1}}_{\times q^n}$$

On a alors $u_2 = q \times u_1 = q \times (q \times u_0) = q^2 u_0$ et $u_3 = q \times u_2 = q^3 u_0$

Proposition

Soit $q \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q .

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \times q^n$$

et plus généralement

$$\text{pour tout } n \geq p, \quad u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Remarques :

Pour passer de u_0 à u_n on doit multiplier n fois u_0 par la raison q .

Pour passer de u_p à u_n on doit multiplier $(n - p)$ fois u_p par la raison q .

Par exemple $u_{10} = u_4 \times q^6$.

Exercice 8 :

Soit (u_n) une suite géométrique telle que $u_2 = 2$ et $u_7 = 486$.

Déterminer la raison q et le premier terme u_0 de la suite (u_n) .

Exercice 9 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $v_n = u_n + 3$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique puis déterminer sa raison et son premier terme v_0 .
2. Exprimer v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n .

Exercice 10 :

On place un capital $C_0 = 1000\text{€}$ à 2.25% par an avec intérêts composés sur un compte épargne.

"Intérêts composés" signifie que les intérêts d'une année s'ajoutent au capital et que l'année suivante ils rapportent aussi des intérêts.

On note C_n le capital disponible au bout de n années.

1. Montrer que (C_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
2. calculer le capital disponible au bout de 10 ans.

2.3.2 Somme de n termes consécutifs

Proposition

Soit q un réel différent de 1.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

- Plus généralement si $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq p$,

$$q^p + q^{p+1} + \cdots + q^n = \frac{q^p - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration :

On pose

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$$

d'où

$$qS_n = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n+1}$$

Par différence on obtient

$$S_n - qS_n = 1 - q^{n+1}$$

$$\text{i.e. } (1 - q)S_n = 1 - q^{n+1} \quad \text{et} \quad S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Exercice 11 :

Calculer les sommes suivantes :

1. $S_1 = 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{10}$.

2. $S_2 = 1 - \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

3. $S_3 = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{n-1}$

Proposition (somme des termes consécutifs d'une suite géométrique)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \begin{cases} u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ (n+1)u_0 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Remarque :

Plus généralement, si $q \neq 1$ la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique est donnée par :

$$(\text{premier terme}) \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

Exercice 12 :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 2$.

Calculer la somme $u_2 + u_3 + \dots + u_{10}$

2.4 Suites arithmético-géométriques : $u_{n+1} = a \times u_n + b$

Définition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une arithmético-géométrique s'il existe deux réels a et b , $a \neq 0$ tels que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b$$

Remarques :

- Si $a = 0$ la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
- Si $a = 1$ la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de raison b .
- Si $b = 0$ la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite géométrique de raison a .

Plan de calcul pour $a \neq 1$.

1. On cherche la solution ℓ de l'équation $\ell = a\ell + b$.

$$\ell = a\ell + b \Leftrightarrow (1 - a)\ell = b \Leftrightarrow \ell = \frac{b}{1 - a}$$

ℓ est appelé le point fixe de la récurrence.

2. On forme la suite $v_n = u_n - \ell$.
 $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors une suite géométrique de raison a .
 En effet

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = (au_n + b) - (a\ell + b) = a(u_n - \ell) = a \times v_n$$

3. On exprime v_n puis u_n en fonction de n :

$$v_n = v_0 \times a^n = (u_0 - \ell)a^n$$

donc

$$u_n = v_n + \ell = (u_0 - \ell)a^n + \ell = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n + \frac{b}{1-a}$$

Exercice 13 :

Déterminer u_n en fonction de n pour les suites suivantes :

1. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2} \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 2 \end{cases}$

Calcul de l'annuité dans le cas d'un emprunt à annuités constantes.

On considère un emprunt à N annuités constantes égales à a , au taux annuel de $x\%$.

On note E le capital emprunté et $i = \frac{x}{100}$.

On pose u_n le capital restant dû à la banque la n -ième année. On a alors

$$u_0 = E \quad \text{et} \quad u_N = 0$$

Si le capital dû à la banque la n -ième année est u_n , l'année suivante il est augmenté de $x\%$ moins la valeur de l'annuité.

On a donc

$$u_{n+1} = u_n(1+i) - a$$

La suite (u_n) est une suite arithmético-géométrique.

- Cherchons le point fixe ℓ de la récurrence :

$$\ell = \ell(1+i) - a \Leftrightarrow a = \ell \times i \Leftrightarrow \ell = \frac{a}{i}$$

- La suite $\left(u_n - \frac{a}{i}\right)$ est alors une suite géométrique de raison $(1+i)$ et de premier terme

$$u_0 - \frac{a}{i} = E - \frac{a}{i}.$$

- On a donc pour tout $n \geq 0$:

$$u_n - \frac{a}{i} = \left(E - \frac{a}{i}\right)(1+i)^n$$

$$u_n = \left(E - \frac{a}{i}\right)(1+i)^n + \frac{a}{i}$$

- Cherchons alors la valeur de l'annuité.

On sait que $u_N = 0$ donc

$$\left(E - \frac{a}{i}\right)(1+i)^N + \frac{a}{i} = 0 \Leftrightarrow E(1+i)^N - \frac{a}{i}(1+i)^N + \frac{a}{i} = 0$$

$$\Leftrightarrow iE(1+i)^N - a(1+i)^N + a = 0 \Leftrightarrow iE(1+i)^N = a((1+i)^N - 1)$$

d'où

$$a = E \times \frac{i(1+i)^N}{(1+i)^N - 1} = E \times \frac{i}{1 - (1+i)^{-N}}$$

Exercice :

On emprunte 250 000€ au début de 2021, pour acheter un logement au taux d'intérêt annuel de 1.15%, sur 15 ans.

Cet emprunt est à annuités constantes.

1. Calculer le montant de l'annuité.
2. Calculer le montant total des intérêts versés à l'organisme de crédit après le versement de la dernière annuité, c'est à dire le coût du crédit.

3 Calcul du n -ième terme d'une suite récurrente à l'aide de Python

3.1 L'énumérateur range

La commande `range` énumère des entiers en progression arithmétique :

- `range(n)` énumère les entiers successifs de 0 à $n - 1$.
- `range(n,m)` énumère les entiers successifs de n à $m - 1$ (avec $n < m$, n pouvant être négatif).
- `range(n,m,r)` énumère les entiers en progression arithmétique de raison r (entier positif ou négatif, appelé le *pas*) de n inclus à m exclus

Remarques

- Attention, l'énumération s'arrête avant l'entier pris comme extrémité à droite, et par défaut elle commence à 0 et non à 1.
- La commande `range` ne provoque pas d'affichage.

Exemples :

- `range(7)` énumère les entiers 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 (début à 0, arrêt avant 7)
- `range(3,9)` énumère les entiers 3, 4, 5, 6, 7, 8 (début à 3, arrêt avant 9)
- `range(-2,8,2)` énumère les entiers -2, 0, 2, 4, 6 (début à -2, de 2 en 2, arrêt avant 8)
- `range(4,0,-1)` énumère les entiers 4, 3, 2, 1 (début à 4, on recule de 1 en 1, arrêt avant 0)

3.2 La boucle for

- La boucle

```
for k in range(n) :  
    -instructions-
```

répète les instructions indentées après les deux points une fois pour chaque valeur k de 0 à $n - 1$.

- La boucle

```
for k in range(n,m,r) :  
    -instructions-
```

répète les instructions indentées après les deux points une fois pour chaque valeur de k énumérée par `range(n,m,r)`

Exemple

Le programme suivant :

```
1. s=0
2. for k in range(5) :
3.     s=s+k**3
4. print(s)
```

demande d'afficher la somme $0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$.

la variable k prend successivement les valeurs 0, 1, 2, 3, 4

la variable s prend successivement les valeurs :

$$0 + 0^3 = 0 \quad , \quad 0 + 1^3 = 1 \quad , \quad 1 + 2^3 = 9 \quad , \quad 9 + 3^3 = 36 \quad , \quad 36 + 4^3 = 100$$

Remarques

La boucle **for** est particulièrement adaptée pour calculer des sommes, des produits, les termes successifs d'une suite définie par une relation de récurrence ou toute succession d'opérations dont on sait à l'avance combien de fois les répéter.

Seules les instructions indentées seront exécutées.

Si k prend les valeurs 0, 1, 2, ..., n choisir

`range(n+1)`

Si k prend les valeurs n , $n+1$, $n+2$, ..., m choisir

`range(n, m+1)`

3.3 Calcul du n -ième terme d'une suite récurrente

Exemple 1 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = u_n^2 + 1$$

Le programme suivant permet d'afficher le terme de rang n , l'entier n étant donné par l'utilisateur :

```
1. n=int(input('entrer la valeur de n :'))
2. u=1          #initialisation
3. for k in range(1,n+1) :
4.     u=u**2+1
5. print(u)
```

Exemple 2 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \frac{n}{2}u_n + 2$$

Le programme suivant permet d'afficher le terme de rang n , l'entier n étant donné par l'utilisateur :

```
1. n=int(input('entrer la valeur de n :'))
2. u=1          #initialisation
3. for k in range(1,n+1) :
4.     u=(k-1)/2*u+2
5. print(u)
```

On a en effet pour tout entier $k \geq 1$, $u_k = \frac{k-1}{2}u_{k-1} + 2$

Exemple 3 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 2 \text{ et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - 3u_n + 1$$

Le programme suivant permet d'afficher le terme de rang n , l'entier n étant donné par l'utilisateur :

```
1. n=int(input('entrer la valeur de n :'))
2. v=1
3. u=2
4. for k in range(2,n+1) :
5.     a=u
6.     u=2*u-3*v+1
7.     v=a
8. print(u)
```

Exemple 4 :

On considère les deux suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 1 \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \end{cases}$$

Le programme suivant permet d'afficher u_n et v_n pour une valeur n entrée par l'utilisateur.

```
1. n=int(input('entrer la valeur de n :'))
2. u=0
3. v=1
4. for k in range(1,n+1) :
5.     a=u
6.     u=(2*u+v)/3
7.     v=(a+2*v)/3
8. print(u,v)
```

Exercice 14 :

Dans chacun des cas suivants, écrire un programme **Python** permettant d'afficher le terme de rang n de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, l'entier n étant donné par l'utilisateur :

1. $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{5u_n - 3}{u_n + 1}$
2. $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = (n+1)u_n + 2^n$
3. $u_0 = -1$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+2} = \frac{1}{n+1}(2u_{n+1} + u_n)$

4 Raisonnement par récurrence

4.1 Exemple introductif

Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

Cette suite est définie par récurrence : chaque terme dépend du précédent.

On souhaite obtenir une formule permettant d'obtenir explicitement u_n en fonction de n .

A première vue, cette formule ne saute pas aux yeux.

Dans une telle situation, le calcul des premiers termes est souvent intéressant pour se faire une idée :

$$\begin{aligned} u_1 &= 2u_0 + 1 = 1 \\ u_2 &= 2u_1 + 1 = 3 \\ u_3 &= 2u_2 + 1 = 7 \\ u_4 &= 2u_3 + 1 = 15 \\ u_5 &= 2u_4 + 1 = 31 \dots \end{aligned}$$

On remarque que la suite (u_n) semble vérifier $u_n = 2^n - 1$.

Nous pouvons donc faire la conjecture

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n - 1$$

Mais une conjecture n'est pas une preuve et vérifier qu'une propriété est vraie pour les 5 premiers termes ne dit rien sur les termes suivants.

Pour confirmer, par une démonstration, que la propriété conjecturée est vraie on effectue un type de raisonnement appelé **raisonnement par récurrence**.

- Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété que l'on veut démontrer ie

$$\mathcal{P}(n) : u_n = 2^n - 1$$

- On a vérifié que la propriété est vraie aux rangs 0, 1, 2, 3, 4 et 5.
On dit que la propriété $\mathcal{P}$ est **initialisée**.
- Supposons que pour un certain entier n on ait effectivement $u_n = 2^n - 1$.
Alors on aurait

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2 \times 2^n - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$$

ce qui est la propriété $\mathcal{P}(n+1)$.

Autrement dit, si la propriété est vraie à un rang n , elle l'est également au rang suivant.

On dit que la propriété $\mathcal{P}$ est **héréditaire**.

- Conclusion : $\mathcal{P}$ est vrai aux rangs 1 à 5 et $\mathcal{P}$ est héréditaire donc $\mathcal{P}$ est encore vraie au rang $n = 6$, puis au rang $n = 7$ etc...
On montre de proche en proche que la propriété $\mathcal{P}$ est finalement vraie à tout rang.

4.2 Principe de la démonstration par récurrence

Principe de la démonstration par récurrence

On considère une propriété dépendant d'un entier n que l'on note $\mathcal{P}(n)$.
Pour montrer que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$ (n_0 entier naturel donné) on procède en trois étapes :

1. Initialisation

on montre que la propriété est vraie pour $n = n_0$

2. Hérédité

on montre que si la propriété est vraie pour un entier $n \geq n_0$ (c'est l'hypothèse de récurrence) alors elle est vraie pour l'entier suivant $n + 1$.

3. Conclusion

la propriété est vraie pour tous les entiers à partir de n_0 : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$

$$\mathcal{P}(1) \text{ vraie} \xrightarrow{\text{hérédité}} \mathcal{P}(2) \text{ vraie} \xrightarrow{\text{hérédité}} \mathcal{P}(3) \text{ vraie} \xrightarrow{\text{hérédité}} \mathcal{P}(4) \text{ vraie} \dots$$

de proche en proche on pourra montrer que $\mathcal{P}(222)$ est vraie.

Rédaction type d'une démonstration par récurrence

Une démonstration par récurrence se rédige de façon très "formatée", c'est toujours le même rituel.

Question type : Montrer par récurrence que pour tout n entier, $n \geq n_0$, on a : $\mathcal{P}(n)$.

Démonstration

- Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété "...".

- Initialisation :

On vérifie que la propriété est vraie au rang n_0

Donc $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.

- Hérédité :

Supposons que pour un entier n , $n \geq n_0$ on a $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons alors que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

on se sert du fait que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et en utilisant un lien entre le rang n et le rang $n + 1$ on montre que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie

Donc $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

- Conclusion :

D'après le principe de récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

fin de la démonstration

Remarque

Pour bien faire une démonstration par récurrence, il faut :

- identifier $\mathcal{P}(n)$ et écrire $\mathcal{P}(n)$
- trouver le rang d'initialisation
- écrire $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n + 1)$ et trouver ce qui peut les "relier".

4.3 Exemples

Exemples

1. Montrons par récurrence que pour tout entier n , $n \geq 1$ on a : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété " $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ".

Initialisation

Pour $n = 1$:

$$\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

donc la propriété $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité

Supposons que pour un entier n , $n \geq 1$ on a $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a

$$1 + 2 + \dots + (n+1) = [1 + 2 + \dots + n] + (n+1) \quad (*)$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Donc en remplaçant dans la relation (*) on obtient

$$1 + 2 + \dots + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

c'est à dire que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion

d'après le principe de récurrence on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6} \end{cases}$$

Montrons que pour tout entier $n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq 3$.

Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété " $0 \leq u_n \leq 3$ ".

Initialisation

Pour $n = 0$: $u_0 = 0$ donc

$$0 \leq u_0 \leq 3$$

donc la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité

Supposons que pour un entier n , $n \geq 0$ on a $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence

$$0 \leq u_n \leq 3$$

$$\text{donc } 6 \leq u_n + 6 \leq 9$$

et comme la fonction racine est croissante sur $[0; +\infty[$

$$0 \leq \sqrt{6} \leq \sqrt{u_n + 6} \leq \sqrt{9}$$

On obtient donc

$$0 \leq u_{n+1} \leq 3$$

c'est à dire que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion

d'après le principe de récurrence on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n \leq 3$$

Exercice 15 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n + 3^n \end{cases}$$

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 3^n$.

Exercice 16 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \leq u_n \leq 3$.

Exercice 17 :

Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

5 Utilisation du symbole somme Σ

5.1 Définition

Etude d'un exemple :

La somme S_n des entiers impairs $1, 3, 5, \dots, 2n - 1$ s'écrit

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$$

Cette notation est peu compréhensible si l'on veut calculer la somme pour $n = 1$ ou $n = 2$ et de manière générale, dans de nombreuses situations, les notations utilisant des pointillés sont difficiles à manipuler et source d'erreur.

Par souci de concision on introduit une nouvelle notation.

La somme S_n ci-dessus est la somme des n nombres

$$2 \times 1 - 1 = 1, \quad 2 \times 2 - 1 = 3, \dots, 2 \times n - 1$$

Ils ont une écriture commune, à savoir $2k - 1$ où k prend successivement les valeurs $1, 2, \dots, n$.
On décide alors de la noter :

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1)$$

Remarques :

- La lettre grecque Σ *sigma* correspond à notre S , initiale du mot somme.
- en bornes du symbole Σ on voit que k varie de 1 à n .
Cette écriture désigne la somme de tous les termes $2k - 1$ obtenus en remplaçant successivement k par 1, par 2, $\dots, n$.
- Ainsi

$$S_1 = \sum_{k=1}^1 (2k - 1) = 2 \times 1 - 1 = 1$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^2 (2k - 1) = (2 \times 1 - 1) + (2 \times 2 - 1) = 1 + 3 = 4$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^3 (2k - 1) = (2 \times 1 - 1) + (2 \times 2 - 1) + (2 \times 3 - 1) = 1 + 3 + 5 = 9$$

- Dans l'écriture $\sum_{k=1}^n (2k - 1)$ on a fait l'effort de donner une écriture commune à chacun des termes de la somme ce qui la rend compréhensible, ce qui n'est pas le cas dans l'expression $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$.
- L'écriture de S_n n'est pas unique, par exemple, on pourrait considérer que les entiers $1, 3, \dots, 2n - 1$ sont de la forme $2k + 1$ où k varie cette fois de 0 à $n - 1$ et écrire

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2k + 1$$

l'essentiel est d'obtenir 1 pour la première valeur de k considérée, 3 pour la deuxième, $\dots$ et $2n - 1$ pour la dernière.

Définition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels.

Pour tout entier $n \geq 0$ on note

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

Plus généralement pour tous entiers n et p tels que $p \leq n$:

$$\sum_{k=p}^n u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$$

Ainsi $\sum_{k=0}^0 u_k = u_0$, $\sum_{k=3}^5 u_k = u_3 + u_4 + u_5$.

Exercice 18 :

1. Ecrire sans le symbole $\sum$ le nombre $\sum_{k=1}^5 k^2$.
2. Ecrire la somme $3 \times 4^2 + 4 \times 5^2 + 5 \times 6^2 + 6 \times 7^2 + 7 \times 8^2 + 8 \times 9^2$ en utilisant le symbole $\sum$.
3. Rappeler la valeur de $\sum_{k=1}^n k$.
4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 3$. Calculer $\sum_{k=3}^{10} u_k$.
5. Calculer $\sum_{k=1}^n 1$.
6. Calculer $\sum_{k=2}^7 5^k$.

Remarques :

- Attention l'indice de sommation k est une variable *muette* (on ne retrouve pas la lettre k dans le résultat final).

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)^2 = \sum_{i=2}^{n+1} (i-1)^2$$

la valeur de la somme ne dépend que de n .

- analysons le nombre de termes dans la somme $\sum_{k=p}^n u_k$: l'idée est de tout rapporter à l'entier 1

$$\overbrace{\underbrace{1 \dots p-1}_{p-1 \text{ entiers}} \underbrace{p \dots n}_{n-(p-1) \text{ entiers}}}^{n \text{ entiers}}$$

Il y a ainsi $n - p + 1$ entiers entre les entiers p et n , p et n compris.

Lorsque $p = 0$ on obtient que la somme $\sum_{k=0}^n u_k$ est constituée de $n + 1$ termes.

5.2 Sommes remarquables, règles de calcul

Proposition : sommes remarquables

- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Pour tout réel a et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n a = (n+1) \times a$$

- Pour tout réel $q \neq 1$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

plus généralement pour tous entiers p et n tels que $p \leq n$

$$\sum_{k=p}^n q^k = \frac{q^p - q^{n+1}}{1 - q}$$

Proposition :

- Relation de Chasles :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite, pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$

— Pour n et p tels que $0 \leq p \leq n$

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^p u_k + \sum_{k=p+1}^n u_k$$

- Linéarité de la somme :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites et λ un réel.

$$\sum_{k=0}^n (\lambda u_k) = \lambda \sum_{k=0}^n u_k,$$

$$\sum_{k=0}^n (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=0}^n v_k$$

Démonstration :

il faut détailler les différentes sommes à l'aide de pointiller en explicitant les débuts et les fins de sommes :

- $S_{n+1} = \underbrace{u_0 + u_1 + \dots + u_n}_{S_n} + u_{n+1}$

- $\sum_{k=0}^n u_k = (u_0 + \dots + u_p) + (u_{p+1} + \dots + u_n)$

- $\sum_{k=0}^n (\lambda u_k) = \lambda u_0 + \lambda u_1 + \dots + \lambda u_n = \lambda(u_0 + u_1 + \dots + u_n) = \lambda \sum_{k=0}^n u_k$
- $\sum_{k=0}^n (u_k + v_k) = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \dots + (u_n + v_n) = (u_0 + \dots + u_n) + (v_0 + \dots + v_n) = \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=0}^n v_k$

Exercice 19 :

Calculer en fonction de n les sommes :

1. $S = \sum_{k=1}^n (3k + 2).$
2. $T = \sum_{k=1}^n \left(3 \left(\frac{1}{2} \right)^k - 2k \right).$

Exercice 20 :

Soit $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$

1. Donner la valeur de $S_1, S_2, S_3, S_4.$
2. Comparer S_3 et $S_4.$
3. Déterminer S_{n+1} en fonction de $S_n.$
4. Ecrire sans le symbole $\sum$ le nombre $\sum_{k=1}^6 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$ et le calculer.
5. Vérifier que pour $k \geq 1, \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$
6. En déduire S_n en fonction de $n.$

Proposition : sommes télescopiques

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0$$

Démonstration

Par linéarité de la somme on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) &= \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \\ &= (u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n) - (u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-2} + u_{n-1}) \\ &= u_n - u_0 \end{aligned}$$

On voit que les termes intermédiaires se simplifient par "télescopage".

Exercice 21 :

Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^n 2^{k+1} - 2^k.$

5.3 Calcul d'une somme à l'aide de Python

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite, pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$$

Soit encore pour tout $n \geq 1$:

$$S_n = S_{n-1} + u_n$$

Le programme Python suivant permet de calculer la valeur de S_n l'entier n étant donné par l'utilisateur :

```
1. n=int(input('entrer la valeur de n :'))
2. S=0          #initialisation
3. for k in range(n+1) :
4.     S=S+mettre ici u_k
5. print(S)
```

Plus généralement pour calculer la somme $S_n = \sum_{k=p}^n u_k$ on utilise le programme :

```
1. n=int(input('entrer la valeur de n :'))
2. S=mettre ici la valeur de S_p
3. for k in range(p+1,n+1) :
4.     S=S+mettre ici u_k
5. print(S)
```

Exemple

Le programme suivant :

```
1. n=int(input('entrer la valeur de n :'))
2. S=1/3
3. for k in range(2,n+1) :
4.     S=S+1/(1+k+k**2)
5. print(S)
```

permet d'afficher la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k+k^2}$

Exercice 22 :

Ecrire un programme Python permettant de calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k+1}$, l'entier k étant donné par l'utilisateur.

Exercices : suites numériques - suites de référence - sommes

1) soit (u_n) une suite définie par : $u_n = 2n^2 - 6n + 4$
Exprimer u_{n+1} et u_{n-1} en fonction de n .

2) Soit (u_n) une suite arithmétique. On sait que $u_5 = 125$ et $u_{16} = 48$.

1. Calculer la raison de la suite et son premier terme u_0 .
 2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
 3. Que vaut u_{30} ?
 4. A partir de quelle valeur de n a-t-on $u_n \leq 0$?
-

3) On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \text{Pour tout entier naturel } n, & u_{n+1} = 5u_n + 2 \times 5^n \end{cases}$$

1. Démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{u_n}{5^n}$ est une suite arithmétique.
 2. En déduire en fonction de n l'expression de v_n puis celle de u_n
-

4) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* & u_{n+1} = u_n + 4n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = u_n - 2n^2$.

1. Montrer que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.
 2. En déduire l'expression de w_n en fonction de n .
 3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
 4. Exprimer la somme $S_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n$ en fonction de n .
-

5) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{Pour tout entier naturel } n, & u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 3n + 7) \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = u_n - 3n - 1$.
 - (a) Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
 - (b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n .
 - (c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

6) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{2}{3} \\ \text{Pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2 - u_n} \end{cases}$$

On admet que chaque terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien défini et est différent de 0.

1. Compléter le programme **Python** suivant qui permet de déterminer u_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur :

```
1. n=int(input('entrer la valeur de n :'))
2. u=...
3. for k in range(...):
4.     u=...
5. print(u)
```

2. On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = 1 - \frac{1}{u_n}$$

- (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique.
- (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n puis u_n en fonction de n .

7)

1. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4$
Déterminer u_n en fonction de n .
2. Soit (u_n) une suite définie par $u_1 = 0$ et pour tout entier n : $u_{n+1} = 0.5u_n + 0.4$
Déterminer u_n en fonction de n .

8) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites définies par

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \\ c_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n \\ b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout n non nul : $a_n + b_n + c_n = 1$.
2. En déduire que : $b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n + 1$
3. Exprimer alors b_n en fonction de n .
4. Exprimer enfin a_n et c_n en fonction de n .

9) Soient deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 1 \end{cases} \quad \text{et pour tout entier } n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \end{cases}$$

1. Compléter le programme **Python** suivant qui permet de déterminer u_n et v_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur :

```
1. n=int(input('entrer la valeur de n :'))
2. u=...
3. v=1
4. for k in range(...):
5.     a=...
6.     u=...
7.     v=...
8. print(u,v)
```

2. Exprimer $u_{n+1} + v_{n+1}$ en fonction de $u_n + v_n$.
3. En déduire $u_n + v_n$ pour tout entier n .
4. Donner une relation de récurrence liant v_{n+1} et v_n .
5. On considère la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \geq 1$ par $w_n = v_n - \frac{1}{3}$.
Montrer que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
6. Calculer w_n, v_n puis u_n en fonction de n .

10) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites définies par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \end{cases} \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$$

1. Calculer u_1, v_1, u_2 puis v_2 .
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = v_n - u_n$.
 - (a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - (b) Exprimer w_n en fonction de n .
 - (c) Déterminer le signe de w_n puis en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $r_n = u_n + v_n$.
 - (a) Démontrer que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
 - (b) En déduire r_n pour tout $n \in \mathbb{N}$
4. (a) En utilisant les résultats des questions 2(b) et 4(b), écrire un système de deux équations vérifié par u_n et v_n .
 - (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n et de v_n en fonction de n .

11) On considère les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

- la donnée des premiers termes : $a_1 = \frac{1}{3}$, $b_1 = \frac{2}{3}$ et $c_1 = 0$
- et les relations :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n ; \quad b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n \quad \text{et} \quad c_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + c_n$$

1. Quelle est la nature de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$? .

En déduire une expression de a_n en fonction de n .

2. Pour tout entier naturel n on pose : $v_n = 3^n b_n$.

(a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique de raison 2.

(b) En déduire, pour tout entier naturel $n \geq 1$, une expression de v_n en fonction de n .

Etablir, pour tout entier naturel $n \geq 1$, que : $b_n = \frac{2n}{3^n}$

3. Montrer que la suite $(a_n + b_n + c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, quelle est la valeur $a_n + b_n + c_n$?

4. En déduire enfin une expression de c_n en fonction de l'entier n .

12) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{Pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 4n + 6) \end{cases}$$

1. Compléter le programme **Python** suivant qui permet de déterminer u_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur :

```
1. n=int(input('entrer la valeur de n :'))
2. u=...
3. for k in range(...):
4.     u=...
5. print(u)
```

2. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

3. Démontrer par récurrence que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2n + \frac{1}{3^n}$$

13) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{7}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -2u_n + 4 \end{cases}$$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$u_n = (-2)^n + \frac{4}{3}$$

14) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$:

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

15) On note $(v_n)_{n \geq 0}$ et $(w_n)_{n \geq 0}$ les deux suites définies par $v_0 = 3, w_0 = 1$ et les relations suivantes, valables pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n + 3w_n \\ w_{n+1} = 3v_n + w_n \end{cases}$$

1. Compléter le programme Python suivant qui permet de déterminer v_n et w_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur :

```
1. n=int(input('entrer la valeur de n :'))
2. v=...
3. w=1
4. for k in range(...):
5.     u=...
6.     v=...
7.     w=...
8. print(v,w)
```

2. On introduit les suites $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies pour tout entier naturel n par :

$$r_n = v_n + w_n \quad \text{et} \quad s_n = v_n - w_n$$

- (a) Etablir que les suites $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites géométriques dont on déterminera la raison et le premier terme.
- (b) Déterminer l'expression de r_n et de s_n en fonction de n .
- (c) En déduire l'expression de v_n et w_n en fonction de n .
3. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 3$ et la relation suivante, valable pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{3u_n + 1}.$$

- (a) Compléter le programme Python suivant qui permet de déterminer u_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur :

```
1. n=int(input('entrer la valeur de n :'))
2. u=...
3. for k in range(...):
4.     u=...
5. print(u)
```

- (b) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir pour tout entier naturel n , l'égalité suivante :

$$u_n = \frac{v_n}{w_n}$$

- (c) Donner l'expression de u_n en fonction de n .

16) Ecrire sans le signe $\sum$ les sommes suivantes :

$$A = \sum_{k=1}^5 \frac{2k+1}{2k-1} \quad ; \quad B = \sum_{k=2}^5 k(k+3) \quad ; \quad C = \sum_{k=1}^3 k^3(k-1)$$

17) Calculer les sommes suivantes :

$$A = \sum_{k=1}^n k \quad ; \quad B = \sum_{k=1}^n (2k) \quad ; \quad C = \sum_{k=1}^n (2k+1) \quad ; \quad D = \sum_{k=1}^n (7k-5)$$

18) Ecrire en n'utilisant qu'un seul symbole $\sum$:

$$A = \sum_{p=1}^{2000} p^2 - \sum_{p=950}^{2000} p^2 \quad ; \quad B = \frac{1}{99} + \sum_{k=1}^{49} \frac{1}{2k-1} \quad ; \quad C = \sum_{p=1}^{2n} p^4 - \sum_{p=n+1}^{2n} p^4$$

19) Soit n un entier naturel non nul. Calculer les sommes suivantes :

$$A = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k \quad ; \quad B = \sum_{k=2}^n 5 \times 3^k \quad ; \quad C = \sum_{k=0}^{n-1} (2^k - 5^k) \quad ; \quad D = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

20)

Calculer pour tout entier $n \geq 1$ la somme :

$$S = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

21) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{Pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a $\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k = u_n$.
2. Pour tout entier n calculer $\sum_{k=0}^{n-1} k$.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

22) On considère la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $b_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_{n+1} = 3b_n + 3^n$$

1. Compléter le programme Python suivant qui permet de déterminer b_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur :

```
1. n=int(input('entrer la valeur de n :'))
2. b=...
3. for k in range(...):
4.     b=...
5. print(b)
```

2. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = n3^{n-1}$
3. Montrer que pour tout entier naturel k on a : $2b_k = b_{k+1} - b_k - 3^k$.
4. Pour tout entier naturel n calculer : $\sum_{k=0}^n 3^k$.
5. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $\sum_{k=0}^n (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1}$.
6. Dédurre des questions précédentes et de 2.e) que pour tout entier naturel n on a :

$$\sum_{k=0}^n k3^{k-1} = \frac{(n+1)3^n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3^{n+1}}{4}$$

7. Compléter le programme Python suivant afin de calculer la valeur de $S_n = \sum_{k=0}^n k3^{k-1}$ l'entier n étant donné par l'utilisateur :

```
1. n=int(input('entrer la valeur de n :'))
2. S=...
3. for k in range(...):
4.     S=...
5. print(S)
```