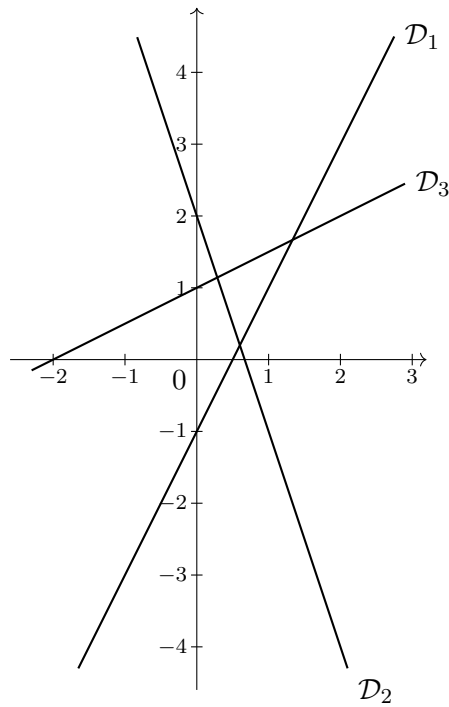


Mathématiques
Révision du programme de première année
–corrigé–

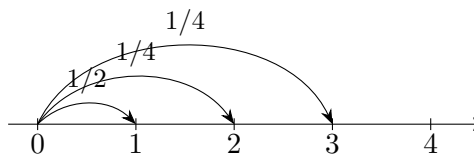
Lycée Brémontier – ECT2

Exercice 1

Droites d'équations $\mathcal{D}_1 : y = 2x - 1$, $\mathcal{D}_2 : y = -3x + 2$, $\mathcal{D}_3 : y = \frac{1}{2}x + 1$.



Exercice 2



Une puce se déplace sur un axe gradué : à chaque saut, elle avance de 1 unité avec probabilité $\frac{1}{2}$, de 2 unités avec probabilité $\frac{1}{4}$, ou de 3 unités avec probabilité $\frac{1}{4}$.

1. À $t = 0$ la puce est en 0. À $t = 1$, elle est donc sur le point d'abscisse 1 avec une probabilité $\frac{1}{2}$, sur le point d'abscisse 2 avec une probabilité $\frac{1}{4}$ et sur le point d'abscisse 3 avec une probabilité $\frac{1}{4}$.
D'où la loi de A_1 :

k	1	2	3
$P(A_1 = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} E(A_1) &= 1 \times P(A_1 = 1) + 2 \times P(A_1 = 2) + 3 \times P(A_1 = 3) \\ &= 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(A_1) &= E(A_1^2) - (E(A_1))^2 \\ E(A_1^2) &= 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{1}{4} = \frac{15}{4} \\ V(A_1) &= \frac{15}{4} - \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{15}{4} - \frac{49}{16} = \frac{60 - 49}{16} = \frac{11}{16} \end{aligned}$$

2. A_2 est l'abscisse du point occupé par la puce après 2 sauts. À chaque saut, la puce avance d'au moins une unité et d'au plus 3 unités, donc $A_2(\Omega) = \llbracket 2, 6 \rrbracket$.

Notons D_1 (resp. D_2) la variable égale au nombre d'unités dont avance la puce lors du 1^{er} (resp. 2^e) saut. D_1 et D_2 sont deux variables indépendantes de même loi que A_1 .

- $(A_2 = 2) = (D_1 = 1) \cap (D_2 = 1)$ donc $P(A_2 = 2) = P(D_1 = 1) \times P(D_2 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
- $(A_2 = 3) = [(D_1 = 1) \cap (D_2 = 2)] \cup [(D_1 = 2) \cap (D_2 = 1)]$, événements incompatibles, donc

$$P(A_2 = 3) = P(D_1 = 1)P(D_2 = 2) + P(D_1 = 2)P(D_2 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

- $(A_2 = 4) = [(D_1 = 1) \cap (D_2 = 3)] \cup [(D_1 = 2) \cap (D_2 = 2)] \cup [(D_1 = 3) \cap (D_2 = 1)]$, donc

$$P(A_2 = 4) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{16}.$$

- $(A_2 = 5) = [(D_1 = 2) \cap (D_2 = 3)] \cup [(D_1 = 3) \cap (D_2 = 2)]$, donc

$$P(A_2 = 5) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

- $(A_2 = 6) = (D_1 = 3) \cap (D_2 = 3)$, donc $P(A_2 = 6) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

D'où la loi de A_2 :

k	2	3	4	5	6
$P(A_2 = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

3.

$$E(A_2) = 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{5}{16} + 5 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{16}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + \frac{3}{8} = \frac{28}{8} = \frac{7}{2}$$

4. Programme Python simulant 100 sauts et calculant A_{100} :

```
1. import numpy as np
2. import numpy.random as rd
3. S = np.zeros(101)
4. for k in range(1,101):
5.     p = rd.randint(1,5)
6.     if p<=2:
7.         S[k] = 1
8.     elif p==3:
9.         S[k] = 2
10.    else:
11.        S[k] = 3
12. A = np.sum(S)
13. print(A)
```

Exercice 3

1. $A(x) = -3x^2 + 3x + 6$.

A est un polynôme de degré 2. Son discriminant vaut $\Delta = 3^2 - 4 \times (-3) \times 6 = 9 + 72 = 81 > 0$ donc A admet deux racines

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{81}}{2 \times (-3)} = \frac{-3 - 9}{-6} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3 + 9}{-6} = -1.$$

Le coefficient de x^2 est négatif, d'où le signe de A :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$
		0	$+$	0
			$-$	

2. $B(x) = \frac{x}{x+2} - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - (x+2)}{x(x+2)} = \frac{x^2 - x - 2}{x(x+2)}$.

$x^2 - x - 2$ est un polynôme de degré 2 : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$, d'où deux racines

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{1 - 3}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 + 3}{2} = 2.$$

D'où le signe de $B(x)$ (avec $x \neq -2$ et $x \neq 0$) :

x	$-\infty$	-2			-1	0			2	$+\infty$
$x^2 - x - 2$		+	+	+	0	-	-	-	0	+
x		-	-	-	-	-	0	+	+	+
$x + 2$		-	0	+	+	+	+	+	+	+
$B(x)$		+		-	0	+		-	0	+

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$, d'où $e^x + 1 + e^{-x} > 0$.

$$e^{-x} - e^x \geq 0 \iff e^{-x} \geq e^x \iff -x \geq x \iff 0 \geq 2x \iff x \leq 0$$

(la fonction exponentielle est croissante)

D'où le signe de $C(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^x + 1 + e^{-x}}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^{-x} - e^x$	$+$	0	$-$
$e^x + 1 + e^{-x}$	$+$		$+$
$C(x)$	$+$	0	$-$

Exercice 4

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2} \end{cases}$$

(u_n) est une suite arithmético-géométrique.

On résout l'équation

$$\ell = \frac{1}{2}\ell + \frac{3}{2} \iff \ell - \frac{1}{2}\ell = \frac{3}{2} \iff \frac{1}{2}\ell = \frac{3}{2} \iff \ell = 3.$$

On pose $v_n = u_n - 3$. Alors

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2} - 3 = \frac{1}{2}u_n - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(u_n - 3) = \frac{1}{2}v_n.$$

(v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = -1 - 3 = -4$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = -4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Puis $v_n = u_n - 3$ soit $u_n = v_n + 3$ et

$$\boxed{u_n = -4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3}$$

Exercice 5

1. Ici $f(x) = -3x^3 + 2x^2 - 1$.

La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ et en $-\infty$ est égale à la limite du terme de plus haut degré.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3) = +\infty \quad \left(\text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \right)$$

2. Ici $f(x) = x + 1 + \frac{\ln(x)}{x}$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissances comparées (la puissance l'emporte sur le logarithme),
donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x + 1 = 1$;
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$,
d'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.

3. Ici $f(x) = (x^3 + x - 1)e^x$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + x - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$,
donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- $f(x) = x^3 e^x + x e^x - e^x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$ par croissances comparées (l'exponentielle l'emporte sur la puissance),
donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

4. Ici $f(x) = x + e^{-x}$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- $f(x) = e^{-x} \left(1 + \frac{x}{e^{-x}}\right) = e^{-x}(1 + x e^x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \text{ par croissances comparées,}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + x e^x = 1 \text{ et par produit } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

Exercice 6

1. $\forall n \geq 1, u_n = 2u_{n-1} + (n-1) - 1 = 2u_{n-1} + n - 2$, donc :

```

1. def u(n):
2.     u = 1
3.     for k in range(1, n+1):
4.         u = 2*u + k - 2
5.     return u

```

2. Soit $P(n)$ la propriété « $u_n \geq n$ ».

Initialisation. $u_1 = 2u_0 + 0 - 1 = 2 - 1 = 1 \geq 1$ donc la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité. Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 1$. Par hypothèse de récurrence, $u_n \geq n$, donc $2u_n \geq 2n \geq 2$ car $n \geq 1$, et $2u_n + n - 1 \geq 2 + n - 1$, soit $u_{n+1} \geq n + 1$ et $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, $\forall n \geq 1, u_n \geq n$.

3. $\forall n \geq 1, u_n \geq n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, donc par comparaison

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}$$

3.a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} = n + 1 + u_{n+1} = n + 1 + 2u_n + n - 1 = 2n + 2u_n$$

3.b) $v_{n+1} = 2(n + u_n) = 2v_n$, donc (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = 0 + u_0 = 1$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times 2^n = 2^n$.

3.c) $v_n = n + u_n$ donc $u_n = v_n - n$, soit

$$\boxed{u_n = 2^n - n}$$

Exercice 7

Une urne contient 1 boule noire et 3 boules blanches.

1. On considère l'expérience : on tire une boule dans l'urne, que l'on répète 400 fois dans des conditions identiques et indépendantes (tirages avec remise).

On considère l'événement N : « la boule tirée est noire » de probabilité $\frac{1}{4}$.

X est la variable égale au nombre de fois où N est réalisé lors des 400 expériences.

X suit une loi binomiale de paramètres $\left(400, \frac{1}{4}\right)$.

$$X(\Omega) = \llbracket 0, 400 \rrbracket, \quad \forall k \in \llbracket 0, 400 \rrbracket, \quad P(X = k) = \binom{400}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{400-k}$$

2.

$$E(X) = 400 \times \frac{1}{4} = 100$$

$$V(X) = 400 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 100 \times \frac{3}{4} = 75$$

3. On a tiré au moins une boule noire si $(X \geq 1)$ est réalisé.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{400}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^{400} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{400}$$

Exercice 8

1. $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^4} = \frac{1}{(u(x))^4}$ avec $u(x) = x^2 + 1$ donc $u'(x) = 2x$.

$$f'(x) = \frac{-4u'(x)}{(u(x))^5} = \frac{-8x}{(x^2 + 1)^5}$$

Sur $\mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$ donc $(x^2 + 1)^5 > 0$, d'où :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-8x$	$+$	0	$-$
$(x^2 + 1)^5$	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$ \begin{array}{ccc} & 1 & \\ \nearrow & & \searrow \\ 0 & & 0 \end{array} $		

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^8} = 0$$

2. $f(x) = \frac{1}{e^x + 2 + e^{-x}} = \frac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = e^x + 2 + e^{-x}$, d'où $u'(x) = e^x - e^{-x}$.

$$f'(x) = -\frac{u'(x)}{(u(x))^2} = \frac{-(e^x - e^{-x})}{(e^x + 2 + e^{-x})^2} = \frac{-e^x + e^{-x}}{(e^x + 2 + e^{-x})^2}$$

$$-e^x + e^{-x} \geq 0 \iff e^{-x} \geq e^x \iff -x \geq x \iff 0 \geq 2x \iff x \leq 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-e^x + e^{-x}$	$+$	0	$-$
$(e^x + 2 + e^{-x})^2$	$+$		$+$
$f(x)$	$ \begin{array}{ccc} & \frac{1}{4} & \\ \nearrow & & \searrow \\ 0 & & 0 \end{array} $		

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 2 + e^{-x}) = +\infty$$

$$\text{et } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 2 + e^{-x}) = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} = 0 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 2 + e^{-x}) = +\infty$$

$$\text{et } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 2 + e^{-x}) = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} = 0 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$f(0) = \frac{1}{e^0 + 2 + e^{-0}} = \frac{1}{1 + 2 + 1} = \frac{1}{4}$$

3. $f(x) = x^2 + 1 - \ln(x)$.

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$$

$$2x^2 - 1 = 0 \iff x^2 = \frac{1}{2} \iff x = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{1}{2}} \iff x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Sur le domaine d'étude $x > 0$:

x	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$2x^2 - 1$	-	0	+
x	+		+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \ln(2)$	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 1 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} -\ln(x) = +\infty, \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

$$f(x) = x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0 \text{ par croissances comparées donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty, \text{ et par produit } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + 1 - \ln(\sqrt{2}^{-1}) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \ln(2)$$

Exercice 9

```
1. def fac(n):  
2.     f = 1  
3.     for k in range(1, n+1):  
4.         f = k*f  
5.     return f
```

Exercice 10

F est une primitive de f sur I .

$$1. f(x) = x^4 + 3x^2 + 2x - 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{5}x^5 + x^3 + x^2 - x$$

$$2. f(x) = \frac{1}{x^3} \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{2x^2}$$

$$3. f(x) = e^{-3x+1} \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x+1}$$

$$4. f(x) = x^n(1-x) = x^n - x^{n+1} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} - \frac{1}{n+2}x^{n+2}$$

Exercice 11

$$A = \sum_{k=1}^n (2k+1) = 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + n = n(n+1) + n = n^2 + 2n$$

$$B = \sum_{k=2}^n 5 \times 3^k = 5 \sum_{k=2}^n 3^k = 5 \times \frac{3^2 - 3^{n+1}}{1-3} = -\frac{5}{2} (9 - 3^{n+1}) = \frac{5}{2} \times 3^{n+1} - \frac{45}{2}$$

$$\begin{aligned} C &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k \\ &= \left(1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) - \left(\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

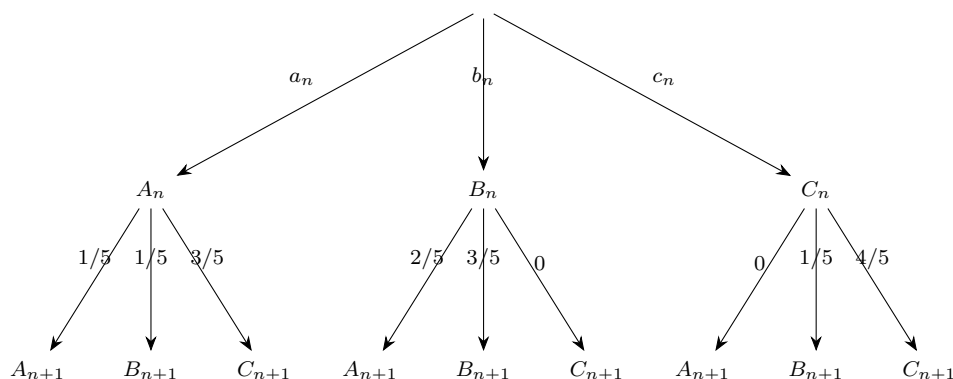
Exercice 12

1. L'athlète commence par la natation le jour 0, donc $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.

Le jour 1, il pratiquera la natation avec une probabilité $\frac{1}{5}$, le cyclisme avec une probabilité $\frac{1}{5}$ et la course à pied avec une probabilité $\frac{3}{5}$, donc

$$a_1 = \frac{1}{5}, \quad b_1 = \frac{1}{5}, \quad c_1 = \frac{3}{5}.$$

2. On a l'arbre de probabilité suivant :



Les événements A_n , B_n , C_n sont deux à deux incompatibles (l'athlète pratique un seul sport par jour) et de réunion l'événement certain (il pratique forcément l'un des 3 sports), donc (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1})$$

$$a_{n+1} = a_n \times \frac{1}{5} + b_n \times \frac{2}{5} + c_n \times 0$$

d'où

$$a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n$$

De même on obtient

$$b_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{3}{5}b_n + \frac{1}{5}c_n \quad \text{et} \quad c_{n+1} = \frac{3}{5}a_n + \frac{4}{5}c_n$$

Exercice 13

1. $f(x) = \frac{-x^2 + 3x}{x - 1}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 + 3x) = -1 + 3 = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$$

Si $x < 1$, $x - 1 < 0$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (x - 1) = 0^-$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$.

Si $x > 1$, $x - 1 > 0$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x - 1) = 0^+$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$.

2. f admet une limite infinie en 1 donc $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

3.

$$\begin{aligned} f(x) - (-x + 2) &= \frac{-x^2 + 3x}{x - 1} - (-x + 2) = \frac{-x^2 + 3x - (-x + 2)(x - 1)}{x - 1} \\ &= \frac{-x^2 + 3x - (-x^2 + x + 2x - 2)}{x - 1} = \frac{-x^2 + 3x + x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{2}{x - 1} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (-x + 2) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x - 1} = 0$$

La droite $\mathcal{D} : y = -x + 2$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 14

$$\frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 3} = \frac{a(x + 3) + b(x - 1)}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{ax + 3a + bx - b}{x^2 + 3x - x - 3} = \frac{(a + b)x + 3a - b}{x^2 + 2x - 3}$$

et $f(x) = \frac{x + 7}{x^2 + 2x - 3}$.

Donc par identification des coefficients du numérateur, a et b sont solutions du système

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 3a - b = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 1 \\ 4a = 8 \end{cases} \quad (L_2 \leftarrow L_1 + L_2) \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 - a = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

D'où

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{x - 1} - \frac{1}{x + 3}}$$

Exercice 15

1.

$$u_2 = u_1 + 6u_0 + 3 = 1 + 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = 1 - 3 + 3 = 1$$

$$u_3 = u_2 + 6u_1 + 3 = 1 + 6 \times 1 + 3 = 10$$

2. Programme demandant n et affichant u_n :

```
1. n = int(input('entrer la valeur de n : '))
2. v = -1/2
3. u = 1
4. for k in range(2, n+1):
5.     a = u
6.     u = u + 6*v + 3
7.     v = a
8. print(u)
```

3. Programme traçant les 21 premiers termes de la suite :

```
1. import numpy as np
2. import matplotlib.pyplot as plt
3. x = np.arange(21)
4. u = np.zeros(21)
5. u[0] = -1/2
6. u[1] = 1
7. for k in range(2, 21):
8.     u[k] = u[k-1] + 6*u[k-2] + 3
9. plt.plot(x, u, 'ko')
```

Exercice 16

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont les solutions de l'équation

$$f(x) = g(x) \iff -x^2 + 3x + 4 = 2x + 1 \iff -x^2 + x + 3 = 0 \quad (\text{équation de degré 2})$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 13$$

d'où deux solutions

$$x_A = \frac{-1 - \sqrt{13}}{-2} = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \quad \text{et} \quad x_B = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$$

Les ordonnées sont

$$y_A = g(x_A) = 2 \times \frac{1 + \sqrt{13}}{2} + 1 = 1 + \sqrt{13} + 1 = 2 + \sqrt{13}$$

$$y_B = g(x_B) = 2 \times \frac{1 - \sqrt{13}}{2} + 1 = 1 - \sqrt{13} + 1 = 2 - \sqrt{13}$$

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent en $A\left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}, 2 + \sqrt{13}\right)$ et $B\left(\frac{1 - \sqrt{13}}{2}, 2 - \sqrt{13}\right)$.

Pour obtenir la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, on étudie le signe de $f(x) - g(x) = -x^2 + x + 3$.

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{13}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$	$+\infty$	
$f(x) - g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

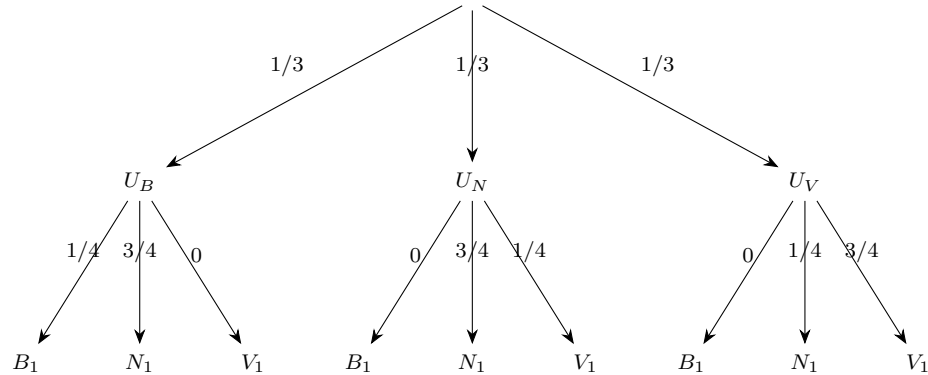
Sur $\left]-\infty, \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{1 + \sqrt{13}}{2}, +\infty\right[$, $f(x) - g(x) \leq 0$, c'est-à-dire $f(x) \leq g(x)$ et $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$.

Sur $\left]\frac{1 - \sqrt{13}}{2}, \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right[$, $f(x) - g(x) \geq 0$, c'est-à-dire $f(x) \geq g(x)$ et $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.

Exercice 17

Trois urnes : U_B (1 blanche, 3 noires), U_N (3 noires, 1 verte), U_V (1 noire, 3 vertes).

1. Pour le premier tirage, on a l'arbre suivant :



D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B_1) = P(U_B)P_{U_B}(B_1) + P(U_N)P_{U_N}(B_1) + P(U_V)P_{U_V}(B_1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 0$$

$$P(B_1) = \frac{1}{12}$$

De même on obtient

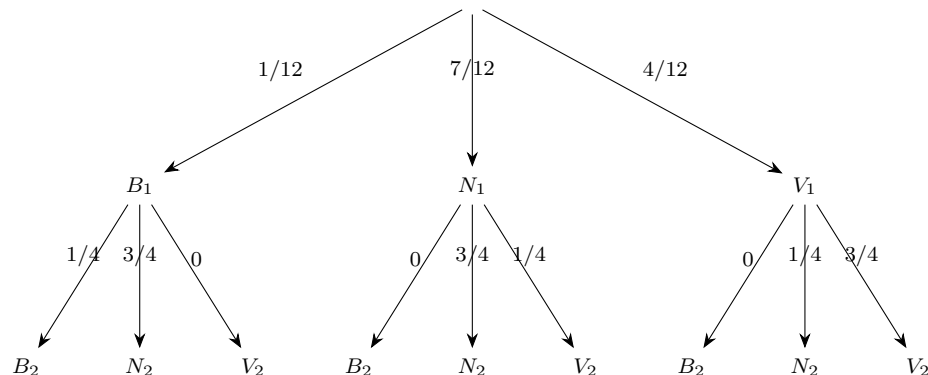
$$P(N_1) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$P(V_1) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

2. On doit calculer

$$P_{N_1}(U_B) = \frac{P(N_1 \cap U_B)}{P(N_1)} = \frac{P(U_B) \times P_{U_B}(N_1)}{P(N_1)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}}{\frac{7}{12}} = \frac{3}{7}$$

3. (B_1, N_1, V_1) est un système complet d'événements. On a l'arbre de probabilité suivant :



$$\begin{aligned}
P(B_2) &= P(B_1)P_{B_1}(B_2) + P(N_1)P_{N_1}(B_2) + P(V_1)P_{V_1}(B_2) \\
&= \frac{1}{12} \times \frac{1}{4} + \frac{7}{12} \times 0 + \frac{4}{12} \times 0
\end{aligned}$$

$$P(B_2) = \frac{1}{48}$$

$$P(N_2) = \frac{1}{12} \times \frac{3}{4} + \frac{7}{12} \times \frac{3}{4} + \frac{4}{12} \times \frac{1}{4} = \frac{28}{48}$$

$$P(N_2) = \frac{7}{12}$$

Exercice 18

1.

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} 2x + 7y + 3z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 6 \\ x + 5y + 3z = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 5y + 3z = 9 \\ 3x + 9y + 4z = 6 \\ 2x + 7y + 3z = 3 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_3 \\
&\iff \begin{cases} x + 5y + 3z = 9 \\ 6y + 5z = 21 \\ 3y + 3z = 15 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow 3L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3 \end{matrix} \iff \begin{cases} x + 5y + 3z = 9 \\ 6y + 5z = 21 \\ z = 9 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \\
&\iff \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \\ z = 9 \end{cases}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} x + 2y + 6z = a \\ y + 3z = b \\ -x - 3y + 2z = c \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 6z = a \\ y + 3z = b \\ 11z = a + b + c \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 \\
&\iff \begin{cases} x = a - 2b \\ y = \frac{-3a + 8b - 3c}{11} \\ z = \frac{a + b + c}{11} \end{cases}
\end{aligned}$$

Exercice 19

La variable T est un vecteur ligne à 14 coordonnées avec, pour $k \in \llbracket 0, 13 \rrbracket$,

$$T[k] = 1 \text{ si } V[k] < 3, \quad T[k] = 0 \text{ sinon.}$$

Donc $T = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0)$.

La variable S est la somme des coefficients de T , donc $S = 5$.

Le programme calcule et affiche le nombre de coordonnées de T strictement inférieures à 3.

Exercice 20

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{4} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \ln(x) = -\infty$, et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$ donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \ln(x)}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty}$$

f admet une limite infinie en 0 donc $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

2.

$$f(x) - \frac{x}{4} = \frac{1 + \ln(x)}{x} = \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ par croissances comparées} \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{x}{4} = 0$$

La droite d'équation $y = \frac{x}{4}$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

3. Pour obtenir la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ on étudie le signe de $f(x) - \frac{x}{4} = \frac{1 + \ln(x)}{x}$.

$$1 + \ln(x) \geq 0 \iff \ln(x) \geq -1 \iff x \geq e^{-1} = \frac{1}{e}$$

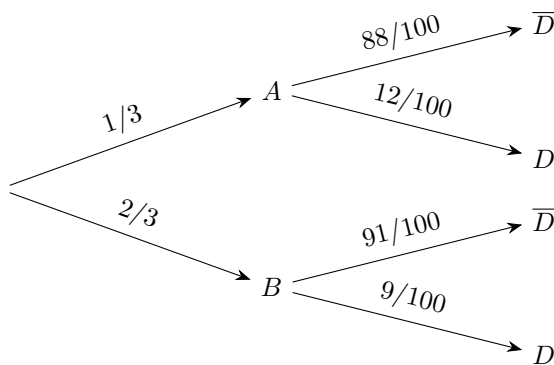
Comme sur $]0, +\infty[$, $x > 0$:

Sur $\left]0, \frac{1}{e}\right[$, $f(x) - \frac{x}{4} \leq 0$ i.e. $f(x) \leq \frac{x}{4}$ et $\mathcal{C}$ est en dessous de $\mathcal{D}$.

Sur $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$, $f(x) - \frac{x}{4} \geq 0$ i.e. $f(x) \geq \frac{x}{4}$ et $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{D}$.

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ se coupent en $A\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{4e}\right)$.

Exercice 21



1.a)

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) = \frac{1}{3} \times \frac{12}{100} + \frac{2}{3} \times \frac{9}{100} = \frac{4}{100} + \frac{6}{100} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

1.b) On doit calculer

$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \times P_A(D)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{12}{100}}{\frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{10}} = \frac{1}{10} \times 10 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

- 2.a) On considère l'expérience : on prélève une balle, que l'on répète n fois dans des conditions identiques et indépendantes.

On considère l'événement « la balle prélevée est défectueuse » de probabilité $\frac{1}{10}$.

Soit X la variable égale au nombre de balles défectueuses prélevées. X suit une loi binomiale de paramètres $\left(n, \frac{1}{10}\right)$.

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{10}\right)^k \left(\frac{9}{10}\right)^{n-k}$$

- 2.b)

$$E(X) = n \times \frac{1}{10} = \frac{n}{10}, \quad V(X) = n \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{9n}{100}$$

Exercice 22

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-3n^2 - n + 8) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-3n^2) = -\infty$

b) $u_n = \frac{3n - n^2 + 3 - n}{2n^2 + 1} = \frac{-n^2 + 2n + 3}{2n^2 + 1}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n^2}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

c) $-1 < -\frac{1}{3} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

d) $u_n = 7^n - 4^n = 7^n \left(1 - \frac{4^n}{7^n}\right) = 7^n \left(1 - \left(\frac{4}{7}\right)^n\right)$

$7 > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 7^n = +\infty$; $-1 < \frac{4}{7} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{4}{7}\right)^n = 1$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

e) $u_n = \frac{5^n + 1}{2^n - 2} = \frac{5^n \left(1 + \frac{1}{5^n}\right)}{2^n \left(1 - \frac{2}{2^n}\right)} = \left(\frac{5}{2}\right)^n \frac{1 + \frac{1}{5^n}}{1 - \frac{2}{2^n}}$

$5 > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{5^n} = 0$. $2 > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{2^n} = 0$. $\frac{5}{2} > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n = +\infty$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 23

1.

$$P(1) = 2 \times 1^4 + 2 \times 1^3 + 2 \times 1^2 + 6 \times 1 - 12 = 2 + 2 + 2 + 6 - 12 = 0$$

$$P(-2) = 2 \times (-2)^4 + 2 \times (-2)^3 + 2 \times (-2)^2 + 6 \times (-2) - 12 = 32 - 16 + 8 - 12 - 12 = 0$$

donc 1 et -2 sont racines de P .

2.a) P est factorisable par $(x-1)(x-(-2)) = (x-1)(x+2)$, i.e. il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x-1)(x+2)Q(x)$.

2.b) P est de degré 4 et $(x-1)(x+2)$ de degré 2, donc Q est de degré 2.

2.c) $(x-1)(x+2) = x^2 + 2x - x - 2 = x^2 + x - 2$.

Par division euclidienne :

$2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 6x - 12$	$x^2 + x - 2$
$-(2x^4 + 2x^3 - 4x^2)$	$2x^2 + 6$
$6x^2 + 6x - 12$	
$-(6x^2 + 6x - 12)$	
0	

$$P(x) = (x-1)(x+2)(2x^2+6)$$

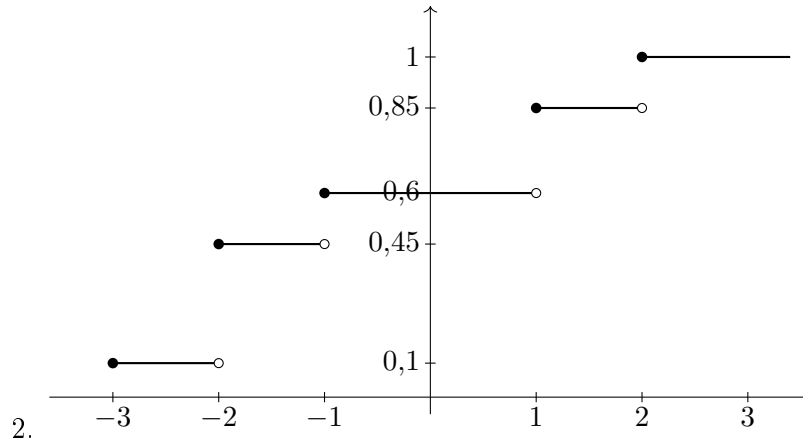
2. $P(x) = 0 \iff x-1=0$ ou $x+2=0$ ou $2x^2+6=0 \iff x=1$ ou $x=-2$
 $(2x^2+6=0$ n'a pas de solution)

3.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	
$2x^2+6$	$+$	$+$	$+$		
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Exercice 24

1. Les coefficients du tableau sont positifs et leur somme vaut 1. Donc on définit bien la loi d'une variable aléatoire.



(Fonction de répartition de X , dont la loi est donnée par $P(X = -2) = 0,1$; $P(X = -1) = 0,35$; $P(X = 1) = 0,15$; $P(X = 2) = 0,25$; $P(X = 3) = 0,15$.)

3.

$$\begin{aligned} P(X \leq 0) &= P(X = -2) + P(X = -1) = 0,45 \\ P(X \geq 1) &= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0,55 \\ P(-2 < X \leq 2) &= P(X = -1) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,75 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} E(X) &= -2 \times 0,1 + (-1) \times 0,35 + 1 \times 0,15 + 2 \times 0,25 + 3 \times 0,15 \\ &= -0,2 - 0,35 + 0,15 + 0,5 + 0,45 = 0,55 \\ V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ E(X^2) &= (-2)^2 \times 0,1 + (-1)^2 \times 0,35 + 1^2 \times 0,15 + 2^2 \times 0,25 + 3^2 \times 0,15 \\ &= 0,4 + 0,35 + 0,15 + 1 + 1,35 = 3,25 \\ V(X) &= 3,25 - (0,55)^2 = 3,25 - 0,3025 = 2,9475 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(2 - 3X) = 2 - 3E(X) = 2 - 3 \times 0,55 = 0,35 \\ V(Y) &= V(2 - 3X) = (-3)^2 V(X) = 9 \times 2,9475 = 26,5275 \end{aligned}$$

6. Soit $f(x) = x^2 - x$ et $Z = f(X)$, donc $Z(\Omega) = \{f(-2), f(-1), f(1), f(2), f(3)\}$.

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^2 - (-2) = 4 + 2 = 6 & f(2) &= 2^2 - 2 = 2 \\ f(-1) &= (-1)^2 - (-1) = 1 + 1 = 2 & f(3) &= 3^2 - 3 = 6 \\ f(1) &= 1^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

donc $Z(\Omega) = \{0, 2, 6\}$.

$$P(Z = 0) = P(X = 1) = 0,15$$

$$P(Z = 2) = P(X = -1) + P(X = 2) = 0,35 + 0,25 = 0,6$$

$$P(Z = 6) = P(X = -2) + P(X = 3) = 0,10 + 0,15 = 0,25$$

D'où la loi de Z :

k	0	2	6
$P(Z = k)$	0,15	0,6	0,25

Exercice 25

1. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln(x) \times 2x}{(x^2)^2} = \frac{x - 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3}$$

puis

$$f''(x) = \frac{-\frac{2}{x} \times x^3 - (1 - 2 \ln(x)) \times 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{-2x^2 - 3x^2(1 - 2 \ln(x))}{x^6}$$

$$= \frac{-2 - 3(1 - 2 \ln(x))}{x^4} = \frac{-5 + 6 \ln(x)}{x^4}$$

2.

$$-5 + 6 \ln(x) \geq 0 \iff 6 \ln(x) \geq 5 \iff \ln(x) \geq \frac{5}{6} \iff x \geq e^{5/6}$$

et $x^4 \geq 0$, d'où

x	0	$e^{5/6}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

Sur $]0, e^{5/6}[$, $f''(x) \leq 0$ et f est concave. Sur $]e^{5/6}, +\infty[$, $f''(x) \geq 0$ et f est convexe.

f'' s'annule et change de signe en $e^{5/6}$ donc $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion de coordonnées $(e^{5/6}, f(e^{5/6}))$.

Exercice 26

```

1. n = int(input('entrer la valeur de n : '))
2. k = 0
3. s = 0
4. while s < n:
5.     k = k + 1
6.     s = k**2 + k
7. print(k)

```

Exercice 27

$$I_1 = \int_0^2 (t^2 - 3t + 2) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t \right]_0^2 = \left(\frac{1}{3} \times 8 - \frac{3}{2} \times 4 + 2 \times 2 \right) - 0 = \frac{8}{3} - 6 + 4 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$$

$$I_2 = \int_0^1 e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^1 = (-e^{-1}) - (-e^0) = -\frac{1}{e} + 1$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_e^3 \frac{1}{t \ln(t)} dt = \int_e^3 \frac{u'(t)}{u(t)} dt \quad \text{avec } u(t) = \ln(t) \\ &= \left[\ln(u(t)) \right]_e^3 = \left[\ln(\ln(t)) \right]_e^3 = \ln(\ln(3)) - \ln(\ln(e)) = \ln(\ln(3)) - \ln(1) = \ln(\ln(3)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_1^x \frac{\ln(t)}{t} dt = \int_1^x u'(t)u(t) dt \quad \text{avec } u(t) = \ln(t) \\ &= \left[\frac{1}{2}u^2(t) \right]_1^x = \left[\frac{1}{2}(\ln(t))^2 \right]_1^x = \frac{1}{2}(\ln(x))^2 - \frac{1}{2}(\ln(1))^2 = \frac{1}{2}(\ln(x))^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_0^1 \frac{e^t}{e^t + 1} dt = \int_0^1 \frac{u'(t)}{u(t)} dt \quad \text{avec } u(t) = e^t + 1 \\ &= \left[\ln(u(t)) \right]_0^1 = \left[\ln(e^t + 1) \right]_0^1 = \ln(e + 1) - \ln(e^0 + 1) = \ln(e + 1) - \ln(2) \end{aligned}$$

$$I_6 = \int_0^2 \frac{2t + 1}{t^2 + t + 1} dt = \left[\ln(t^2 + t + 1) \right]_0^2 = \ln(7) - \ln(1) = \ln(7)$$

$$\begin{aligned} I_7 &= \int_0^1 t e^{1-t^2} dt = \int_0^1 -\frac{1}{2} \times (-2t) e^{1-t^2} dt = \int_0^1 -\frac{1}{2} u'(t) e^{u(t)} dt \quad \text{avec } u(t) = 1 - t^2 \\ &= \left[-\frac{1}{2} e^{u(t)} \right]_0^1 = \left[-\frac{1}{2} e^{1-t^2} \right]_0^1 = \left(-\frac{1}{2} e^0 \right) - \left(-\frac{1}{2} e^1 \right) = -\frac{1}{2} + \frac{e}{2} = \frac{e-1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_8 &= \int_0^1 \frac{2t + 1}{(t^2 + t + 3)^3} dt = \int_0^1 \frac{u'(t)}{(u(t))^3} dt \quad \text{avec } u(t) = t^2 + t + 3 \\ &= \left[-\frac{1}{2(u(t))^2} \right]_0^1 = \left[-\frac{1}{2(t^2 + t + 3)^2} \right]_0^1 = \left(-\frac{1}{2 \times 25} \right) - \left(-\frac{1}{2 \times 9} \right) = \frac{-9 + 25}{450} = \frac{16}{450} = \frac{8}{225} \end{aligned}$$

Exercice 28

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et I la matrice identité d'ordre 3.

1.

$$I + J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

2.

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^3 = J^2 \times J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$J^3 = 0$

donc pour $k \geq 3$, $J^k = J^3 \times J^{k-3} = 0 \times J^{k-3} = 0$.

3. Soit $P(n)$ la propriété « $A^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2$ ».

Initialisation. Pour $n = 0$: $I + 0 \times J + \frac{0 \times (-1)}{2}J^2 = I = A^0$, donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Supposons qu'il existe un entier $n \geq 0$ pour lequel la propriété est vraie.

$$A^{n+1} = A \times A^n$$

avec, par hypothèse de récurrence, $A^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2$ et $A = I + J$, d'où

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= (I + J) \left(I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2 \right) \\ &= I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2 + J + nJ^2 + \frac{n(n-1)}{2}J^3 \\ &= I + (n+1)J + \left(\frac{n(n-1)}{2} + n \right) J^2 \quad (\text{car } J^3 = 0) \\ &= I + (n+1)J + \frac{n^2 - n + 2n}{2}J^2 = I + (n+1)J + \frac{n^2 + n}{2}J^2 \\ &= I + (n+1)J + \frac{(n+1)n}{2}J^2 \end{aligned}$$

et la propriété est encore vraie au rang $n+1$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2$.

4.

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2 + n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 29

1.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2} \ln(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} \ln(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

2. $\forall x > 0, f'(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{x} - 1 = -\frac{1}{2x} - 1.$

Sur $]0, +\infty[$, $-\frac{1}{2x} < 0$ et $-1 < 0$ donc $f'(x) < 0$ et f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

3. f est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

0 appartient à l'intervalle image $f(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$,

donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$, notée α .

4.

$$f(1) = 2 - \frac{1}{2} \ln(1) - 1 = 2 - 0 - 1 = 1$$

$$f(\alpha) = 0$$

$$f(e) = 2 - \frac{1}{2} \ln(e) - e = 2 - \frac{1}{2} - e = \frac{3}{2} - e$$

$\frac{3}{2} - e < 0 < 1$ donc $f(e) < f(\alpha) < f(1)$, et comme f est décroissante, $1 < \alpha < e$.

Exercice 30

1.

$$\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_{n+1} = 2b_n \end{cases}$$

donc (b_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1.

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = b_0 \times 2^n = 2^n$$

2. $a_{n+1} = 2a_n + b_n = 2a_n + 2^n$

3.a)

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{2a_n + 2^n}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} \\ &= \frac{2a_n}{2^{n+1}} + \frac{2^n}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

donc (c_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $c_0 = \frac{a_0}{b_0} = 0$.

3.b) On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = c_0 + n \times \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$.

3.c) $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ donc $a_n = c_n \times b_n = \frac{n}{2} \times 2^n = n \times 2^{n-1}$.

Exercice 31

Une urne contient 5 boules blanches et 7 boules rouges. On effectue 4 tirages sans remise.

1. Les 4 boules tirées sont rouges si $R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4$ est réalisé.

D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4) &= P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) \times P_{R_1 \cap R_2}(R_3) \times P_{R_1 \cap R_2 \cap R_3}(R_4) \\ &= \frac{7}{12} \times \frac{6}{11} \times \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{12 \times 11 \times 10 \times 9} = \frac{7}{99} \end{aligned}$$

2. Une boule rouge apparaît pour la première fois au 3^e tirage si $B_1 \cap B_2 \cap R_3$ est réalisé.

$$P(B_1 \cap B_2 \cap R_3) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(R_3) = \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{7}{10} = \frac{7}{66}$$

Exercice 32

On considère la suite $c_n = 1 - \frac{2^n - 1}{3^{n-1}}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n - 1}{3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 0 \quad \left(\text{car } -1 < \frac{2}{3} < 1\right)$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 1$.

Le programme calcule le plus petit entier n à partir duquel $c_n \geq 0,95$.

Donc pour $n \geq 11$ on a $c_n \geq 0,95$ et $c_{10} < 0,95$.

Exercice 33

1. $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2x$ sur $] -1, 1[$.

Sur $] -1, 1[$, $1+x > 0$ et $1-x > 0$ donc $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x) - 2x$ et

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} - 2 = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} - 2 = \frac{1-x+1+x-2(1+x)(1-x)}{(1+x)(1-x)} = \frac{2-2(1-x^2)}{1-x^2} = \frac{2x^2}{1-x^2}$$

Sur $] -1, 1[$, $2x^2 \geq 0$ et $1-x^2 > 0$ donc $f'(x) \geq 0$ et f est croissante.

2. $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{-x} + (x^2 + 1)(-e^{-x}) = (2x - x^2 - 1)e^{-x} = (-x^2 + 2x - 1)e^{-x} \\ &= -(x^2 - 2x + 1)e^{-x} = -(x-1)^2 e^{-x} \end{aligned}$$

Sur $\mathbb{R}$, $(x-1)^2 \geq 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $f'(x) \leq 0$ et f est décroissante.

Exercice 34

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -12 & 13 & -12 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$3I - 2A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 12 & -10 & 12 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -12 & 13 & -12 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{A^2 = 3I - 2A}$.

2. Soit $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$AH = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 9 & -9 & 9 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = -3H$$

donc $\boxed{AH = -3H}$.

3.

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & 6 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 2H$$

donc $\boxed{A = I + 2H}$.

4. Soit $P(n)$ la propriété « $A^n = I + e_n H$ ».

Initialisation. $I + e_0 H = I + 0 \times H = I = A^0$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité. Supposons qu'il existe un entier $n \geq 0$ pour lequel la propriété est vraie.

$$A^{n+1} = A \times A^n = A(I + e_n H) = A + e_n A H$$

Avec $A = I + 2H$ et $AH = -3H$:

$$A^{n+1} = I + 2H + e_n(-3H) = I + (2 - 3e_n)H = I + e_{n+1}H$$

donc la propriété est encore vraie au rang $n + 1$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = I + e_n H$.

5.

$$\begin{cases} e_0 = 0 \\ e_{n+1} = -3e_n + 2 \end{cases}$$

donc (e_n) est une suite arithmético-géométrique.

On résout $\ell = -3\ell + 2 \iff 4\ell = 2 \iff \ell = \frac{1}{2}$.

On pose $w_n = e_n - \frac{1}{2}$, alors

$$w_{n+1} = e_{n+1} - \frac{1}{2} = -3e_n + 2 - \frac{1}{2} = -3e_n + \frac{3}{2} = -3\left(e_n - \frac{1}{2}\right) = -3w_n$$

(w_n) est une suite géométrique de raison -3 et de premier terme $w_0 = e_0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

On a alors $\forall n \geq 0$, $w_n = w_0 \times (-3)^n = -\frac{1}{2} \times (-3)^n$ et $e_n = w_n + \frac{1}{2}$, soit

$$\boxed{e_n = -\frac{1}{2} \times (-3)^n + \frac{1}{2}}$$

6.

$$A^n = I + \left(-\frac{1}{2} \times (-3)^n + \frac{1}{2}\right) H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}(-3)^n + \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}(-3)^n + \frac{3}{2} & \frac{3}{2}(-3)^n - \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}(-3)^n + \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2}(-3)^n + \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(-3)^n - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}(-3)^n + \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 35

1.

$$\int_0^1 mx^{n-1} dx = \left[n \times \frac{1}{m} x^n \right]_0^1 = \left[x^n \right]_0^1 = 1^n - 0^n = 1$$

2.

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln(2)} (e^{-x} - e^{-2x}) dx &= \left[-e^{-x} - \frac{1}{-2} e^{-2x} \right]_0^{\ln(2)} = \left[-e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^{\ln(2)} \\ &= \left(-e^{-\ln(2)} + \frac{1}{2} e^{-2\ln(2)} \right) - \left(-e^0 + \frac{1}{2} e^0 \right) \\ &= -e^{\ln(1/2)} + \frac{1}{2} e^{\ln(1/4)} + 1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

3.

$$\int_0^1 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx = \int_0^1 \frac{u'(x)}{(u(x))^2} dx \quad (\text{avec } u(x) = e^x + 1) = \left[-\frac{1}{u(x)} \right]_0^1 = \left[-\frac{1}{e^x + 1} \right]_0^1 = -\frac{1}{e + 1} + \frac{1}{2}$$

Exercice 36

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{0}{1} = 0$. $\mathcal{C}$ admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $-\infty$.

2.

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x \left(\frac{1}{e^x} + 1 \right)} = \frac{1}{e^{-x} + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{-x} + 1} = \frac{1}{0 + 1} = 1.$$

$\mathcal{C}$ admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

Exercice 37

Deux urnes : U (2 blanches, 1 noire) et V (1 blanche, 3 noires).

1. X_1 est le nombre de boules blanches tirées au 1^{er} tirage. Le premier tirage s'effectue dans U donc

k	0	1
$P(X_1 = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{2}{3}$.

2.a) Si $(X_1 = 0)$ est réalisé, le premier tirage a donné une boule noire. Le deuxième tirage se fait dans U donc

$$P_{(X_1=0)}(X_2 = 0) = \frac{1}{3}, \quad P_{(X_1=0)}(X_2 = 1) = \frac{2}{3}$$

Si $(X_1 = 1)$ est réalisé, le premier tirage a donné une boule blanche. Le deuxième tirage se fait dans V donc

$$P_{(X_1=1)}(X_2 = 1) = \frac{3}{4} \quad (\text{le nombre de boules blanches n'augmente pas, on a obtenu une boule noire dans } V)$$

$$P_{(X_1=1)}(X_2 = 2) = \frac{1}{4} \quad (\text{le nombre de boules blanches augmente de 1, on a obtenu une boule blanche dans } U)$$

2.b) Après 2 tirages on peut avoir obtenu 0, 1 ou 2 boules blanches donc $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(X_2 = 0) = P(X_1 = 0)P_{(X_1=0)}(X_2 = 0) + P(X_1 = 1)P_{(X_1=1)}(X_2 = 0) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0 = \frac{1}{9}$$

$$P(X_2 = 1) = P(X_1 = 0)P_{(X_1=0)}(X_2 = 1) + P(X_1 = 1)P_{(X_1=1)}(X_2 = 1) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{13}{18}$$

$$P(X_2 = 2) = P(X_1 = 0)P_{(X_1=0)}(X_2 = 2) + P(X_1 = 1)P_{(X_1=1)}(X_2 = 2) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

D'où la loi de X_2 :

k	0	1	2
$P(X_2 = k)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{13}{18}$	$\frac{1}{6}$

2.c)

$$E(X_2) = 0 \times \frac{1}{9} + 1 \times \frac{13}{18} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{19}{18}$$

2. Programme simulant X_2 :

```

12. res1 = 0
13. tirage2 = rd.randint(1,4)
14. if tirage2 <= 2:
15.     res2 = 1
16. else:
17.     res2 = 0
18. X2 = res1 + res2
19. print(X2)

```

Exercice 38

1. $f(x)$ existe si et seulement si $x^2 - 4 \neq 0$, i.e. $x \neq \pm 2$, donc f est définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Soit $x \in \mathcal{D}_f$, alors $-x \in \mathcal{D}_f$ (car $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0) et

$$f(-x) = 2(-x) - \frac{-x}{(-x)^2 - 4} = -2x + \frac{x}{x^2 - 4} = -\left(2x - \frac{x}{x^2 - 4}\right) = -f(x)$$

f est impaire. Sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.

2. $g(x)$ existe si et seulement si $x^2 + 2 \neq 0$. Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ donc $x^2 + 2 \geq 2$ et $x^2 + 2 \neq 0$, donc g est définie sur $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathcal{D}_g$, $-x \in \mathcal{D}_g$ et

$$g(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{(-x)^2 + 2} = \frac{e^{-x} - e^x}{x^2 + 2} = \frac{-(e^x - e^{-x})}{x^2 + 2} = -g(x)$$

g est impaire.

3. $h(x)$ existe si et seulement si $x^2 + 1 > 0$. Or $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq 1 > 0$ donc $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathcal{D}_h, -x \in \mathcal{D}_h$ et

$$h(-x) = \ln((-x)^2 + 1) = \ln(x^2 + 1) = h(x)$$

h est paire. Sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exercice 39

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^n (3k+2) = 3 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 2 = 3 \times \frac{n(n+1)}{2} + 2(n+1) \quad (\text{il y a } n+1 \text{ entiers de } 0 \text{ à } n) \\ &= (n+1) \left(\frac{3n}{2} + 2 \right) = \frac{(n+1)(3n+4)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \sum_{k=1}^n 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 5 \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 5 \times \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = 5 \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= 5 \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{3}{2}} = \frac{10}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln(k) = \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \sum_{k=1}^n \ln(k) \\ &= (\ln(2) + \ln(3) + \cdots + \ln(n) + \ln(n+1)) - (\ln(1) + \ln(2) + \cdots + \ln(n)) \\ &= \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1) \end{aligned}$$

Exercice 40

1. $f(t) = t(1-t) = t - t^2$ donc $f'(t) = 1 - 2t$.

t	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	0	$\frac{1}{4}$	0

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

2. Soit $P(n)$ la propriété « $u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ».

Initialisation. $u_0 = \frac{1}{2}$ donc $u_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Supposons qu'il existe un entier n pour lequel la propriété est vraie. Par hypothèse de récurrence, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$, et f est croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, d'où $f(0) \leq f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$, i.e. $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$, et la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = u_n(1 - u_n) - u_n = u_n - u_n^2 - u_n = -u_n^2$$

donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et la suite (u_n) est décroissante. (u_n) est décroissante minorée par 0 donc d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) est convergente. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$ d'une part, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(1 - u_n) = \ell(1 - \ell)$ d'autre part.

Or $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$, d'où par unicité de la limite, $\ell = \ell(1 - \ell)$.

On résout l'équation précédente :

$$\ell = \ell(1 - \ell) \iff \ell = \ell - \ell^2 \iff 0 = -\ell^2 \iff \ell = 0$$

D'où

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$$

Exercice 41

1. $g'(x) = 1 \times e^x + xe^x = (1+x)e^x$

Sur $[0, +\infty[$, $1+x > 0$ et $e^x > 0$ donc $g'(x) > 0$.

$$g(0) = 0 \times e^0 - 1 = -1$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	-1	$+\infty$

2. Sur $[0, +\infty[$, g est continue et strictement croissante.

0 appartient à l'intervalle image $g([0, +\infty[) = [-1, +\infty[$,

donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0, +\infty[$.

$$g(0) = -1 ; g(\alpha) = 0 ; g(1) = e - 1.$$

$-1 < 0 < e - 1$ i.e. $g(0) < g(\alpha) < g(1)$ et comme g est croissante, $0 < \alpha < 1$.

3. Méthode de dichotomie :

```

1. import numpy as np
2. def g(x):
3.     return x*np.exp(x) - 1
4. a = 0
5. b = 1
6. while b-a > 0.01:
7.     m = (a+b)/2
8.     if g(a)*g(m) <= 0:
9.         b = m
10.    else:
11.        a = m
12. print(a)

```

Exercice 42

F est une primitive de f .

1. $f(x) = \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+1}$. On pose $u(x) = x^2 + 1$, $u'(x) = 2x$, d'où $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$ et

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(u(x)) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$$

2. $f(x) = xe^{-x^2/2}$. On pose $u(x) = -\frac{x^2}{2}$, $u'(x) = -x$, d'où $f(x) = -u'(x)e^{u(x)}$ et

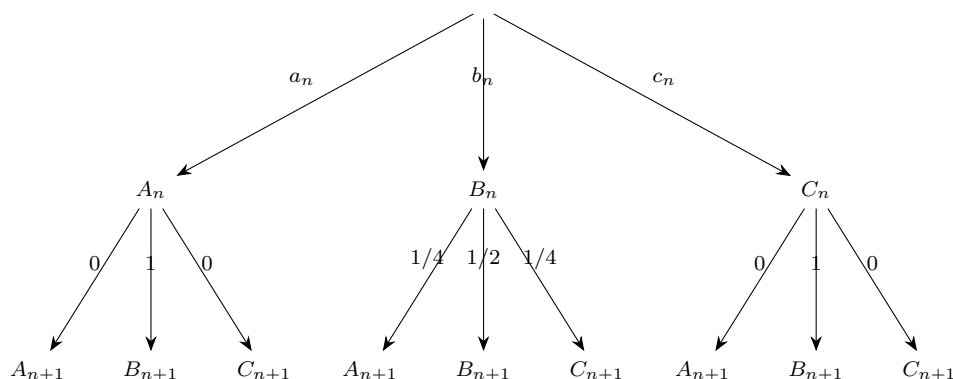
$$F(x) = -e^{u(x)} = -e^{-x^2/2}$$

3. $f(x) = \frac{1}{2x+1}$, donc $F(x) = \frac{1}{2} \ln(2x+1)$.

Exercice 43

Une mouche se déplace entre trois pièces A , B et C .

- Les événements (A_n, B_n, C_n) sont deux à deux incompatibles (la mouche est dans une seule pièce à la fois) et de réunion l'événement certain (la mouche est forcément dans l'une des trois pièces), donc (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements.
- On a l'arbre de probabilité suivant :



D'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1})$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$$

De même,

$$b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n \quad \text{et} \quad c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$$

Exercice 44

1.

```
3. def f(x):
4.     if x < 1:
5.         return 0
6.     else:
7.         return 1 - 1/x**2 - 2*np.log(x)/x**2
```
2. On obtient la représentation graphique de f sur l'intervalle $] -2, 5[$.

Exercice 45

1. $A(x) = (x^2 - 2) \ln(x)$.

$$x^2 - 2 = 0 \iff x^2 = 2 \iff x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{2}$$

(un polynôme de degré 2 est du signe du coefficient de x^2 à l'extérieur des racines)

x	0	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$x^2 - 2$	−	−	0	+
$\ln(x)$	−	0	+	+
$A(x)$	+	0	−	+

2. $B(x) = 1 - 2e^{-x}$.

$$1 - 2e^{-x} \geq 0 \iff 2e^{-x} \leq 1 \iff e^{-x} \leq \frac{1}{2} \iff -x \leq \ln\left(\frac{1}{2}\right) \iff x \geq -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$$

x	$-\infty$	$\ln(2)$	$+\infty$
$B(x)$	−	0	+

Exercice 46

1. $f(x) = 2 \ln(x) - x^2 = -x^2 \left(-\frac{2 \ln(x)}{x^2} + 1 \right)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0 \text{ par croissances comparées, donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2 \ln(x)}{x^2} + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty \quad \text{d'où} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \ln(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} -x^2 = 0 \end{array} \right\} \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty}$$

$$2. \quad f(x) = \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right).$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1 \\ \lim_{X \rightarrow 1} \ln(X) = 0 \end{array} \right\} \text{ par composition } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 0$$

et par produit

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$$

$$3. \quad f(x) = \frac{e^x - 1}{x}.$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (cours, taux d'accroissement de la fonction exponentielle en 0).
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ par croissances comparées (l'exponentielle l'emporte sur la puissance) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$, donc par somme $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 1 = -1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$, d'où $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0}$.

$$4. \quad f(x) = x + 1 - \frac{x}{e^x}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ par croissances comparées} \end{array} \right\} \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

$$f(x) = \frac{xe^x + e^x - x}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \text{ par croissances comparées, } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$$

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x + e^x - x = +\infty$, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$, d'où par quotient

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty}$$

Exercice 47

```

1. def Somme(n):
2.     S = 0
3.     for k in range(1, n+1):
4.         S = S + k**(1/3)
5.     return S

```

Exercice 48

$$4x^4 - 9x^2 + 2 = 0 \iff \begin{cases} X = x^2 \\ 4X^2 - 9X + 2 = 0 \end{cases}$$

$4X^2 - 9X + 2 = 0$ est une équation de degré 2 en X . Son discriminant vaut

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \times 4 \times 2 = 81 - 32 = 49 > 0$$

d'où deux solutions

$$X_1 = \frac{-(-9) - \sqrt{49}}{2 \times 4} = \frac{9 - 7}{8} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{9 + 7}{8} = 2$$

On a donc

$$4x^4 - 9x^2 + 2 = 0 \iff \begin{cases} x^2 = \frac{1}{4} \\ \text{ou} \\ x^2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{2} \end{cases}$$
$$\mathcal{S} = \left\{ -\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2} \right\}$$

Exercice 49

Une urne contient 1 boule noire et 3 boules blanches.

1. On effectue entre 1 et 4 tirages pour obtenir la boule noire, donc $Z(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$.

Pour $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, on note B_k l'événement « on obtient une boule blanche au $k^{\text{ième}}$ tirage » et N_k « on obtient une boule noire au $k^{\text{ième}}$ tirage ».

$$(Z = 1) = N_1 \quad \text{donc} \quad P(Z = 1) = P(N_1) = \frac{1}{4}$$

$$(Z = 2) = B_1 \cap N_2 \quad \text{donc} \quad P(Z = 2) = P(B_1) \times P_{B_1}(N_2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

$$(Z = 3) = B_1 \cap B_2 \cap N_3 \quad \text{donc} \quad P(Z = 3) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(N_3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$(Z = 4) = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap N_4$$

$$P(Z = 4) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(B_3) \times P_{B_1 \cap B_2 \cap B_3}(N_4) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}$$

Z suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, 4 \rrbracket$

- 2.

$$E(Z) = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad V(Z) = \frac{4^2-1}{12} = \frac{15}{12}$$

Exercice 50

1.

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad u_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} \geq 0$$

donc la suite (u_n) est croissante.

3. Soit $f(x) = \ln(1+x)$ sur $[0, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{et} \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$f''(x) < 0$ donc f est concave.

Soit T la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 : T a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$, avec $f(0) = \ln(1) = 0$ et $f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$, d'où $y = x$.

La courbe d'une fonction concave est située en dessous de ses tangentes, donc

$$\forall x \geq 0, \quad \ln(1+x) \leq x$$

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(k+1) - \ln(k) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

5. Soit $k \geq 1$, $\frac{1}{k} \geq 0$ donc d'après la question 3, $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$, et donc d'après la question 4,

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

6. Soit $n \geq 1$. En sommant l'inégalité précédente,

$$\sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

avec

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) &= \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \sum_{k=1}^n \ln(k) \\ &= (\ln(2) + \ln(3) + \cdots + \ln(n+1)) - (\ln(1) + \ln(2) + \cdots + \ln(n)) \\ &= \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1) \end{aligned}$$

On a bien

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad \ln(n+1) \leq u_n}$$

7. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$ donc par comparaison

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}$$