

Mathématiques
Devoirs de vacances

A rendre le jour de la rentrée

Exercice 1

Dans un repère orthonormé construire les droites ci-dessous :

$$(\mathcal{D}_1) \text{ d'équation } y = 2x - 1 \quad (\mathcal{D}_2) \text{ d'équation } y = -3x + 2 \quad (\mathcal{D}_3) \text{ d'équation } y = \frac{1}{2}x + 1$$

Exercice 2

Une puce se déplace sur un axe gradué. À l'instant 0, la puce se trouve sur le point d'abscisse 0.

À partir de l'instant 0, la puce effectue à chaque instant, un saut vers la droite selon le protocole suivant :

- elle effectue un saut d'une unité vers la droite avec la probabilité $\frac{1}{2}$;
- elle effectue un saut de deux unités vers la droite avec la probabilité $\frac{1}{4}$;
- elle effectue un saut de trois unités vers la droite avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

Les différents sauts sont supposés indépendants.

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la variable aléatoire A_n égale à l'abscisse du point occupé par la puce à l'issue de son n -ième saut.

1. Donner la loi de la variable aléatoire A_1 . Calculer $E(A_1)$ et $V(A_1)$.
2. Justifier que $A_2(\Omega) = \llbracket 2, 6 \rrbracket$. Montrer que la loi de A_2 est donnée par :

$$P([A_2 = 2]) = \frac{1}{4}, P([A_2 = 3]) = \frac{1}{4}, P([A_2 = 4]) = \frac{5}{16}, P([A_2 = 5]) = \frac{1}{8}, P([A_2 = 6]) = \frac{1}{16}.$$

3. Calculer $E(A_2)$.
4. On rappelle qu'en Python l'instruction `rd.randint(a,b)` simule une variable aléatoire suivant la loi discrète uniforme sur $\llbracket a, b-1 \rrbracket$.

Compléter le programme suivant pour qu'il simule les 100 premiers déplacements de la puce dans un vecteur **S** puis qu'il renvoie une simulation de la variable aléatoire A_{100}

```
1. import numpy as np
2. import numpy.random as rd
3. S=np.zeros(101)
4. for k in range(1,101) :
5.     p=rd.randint(1,5)
6.     if ....:
7.         S[k]=1
8.     elif p==3 :
9.         S[k]=....
10.    else :
11.        ....
12. A=....
13. print(A)
```

Exercice 3

Etudier le signe des expressions suivantes :

1. $A(x) = -3x^2 + 3x + 6$ définie sur $\mathbb{R}$
2. $B(x) = \frac{x}{x+2} - \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$
3. $C(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^x + 1 + e^{-x}}$ définie sur $\mathbb{R}$

Exercice 4

Déterminer u_n en fonction de n pour la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2} \end{cases}$$

Exercice 5

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $f(x) = -3x^3 + 2x^2 - 1$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. $f(x) = x + 1 + \frac{\ln(x)}{x}$, en $+\infty$ et à droite en 0
3. $f(x) = (x^3 + x - 1)e^x$, en $+\infty$ et $-\infty$
4. $f(x) = e^{-x} + x$ en $+\infty$ et $-\infty$

Exercice 6

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{Pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 2u_n + n - 1 \end{cases}$$

1. Complétez la fonction **Python** suivante qui pour tout entier n renvoie la valeur de u_n

```
1. def u(n) :  
2.     u=....  
3.     for k in range (1,n+1) :  
4.         u=.....  
5.     return ....
```

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n , $u_n \geq n$.
Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. On pose pour tout entier naturel n , $v_n = n + u_n$.
 - (a) Exprimer v_{n+1} en fonction de n et u_n .
 - (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique et exprimer, pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n uniquement.
 - (c) Montrer enfin que pour tout entier naturel n , $u_n = 2^n - n$.

Exercice 7

Une urne $\mathcal{U}$ contient 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher.

On procède à 400 tirages successifs avec remise d'une boule dans $\mathcal{U}$. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois où la boule noire a été piochée.

1. Quelle est la loi de X ?
On précisera $X(\Omega)$ et $P(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
2. Donner la valeur de l'espérance de X notée $E(X)$ et vérifier que la variance de X , notée $V(X)$ est égale à 75.
3. Déterminer la probabilité de tirer au moins une boule blanche.

Exercice 8

Déterminer la dérivée puis les variations des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^4}$ sur $\mathbb{R}$
2. $f(x) = \frac{1}{e^x + 2 + e^{-x}}$ sur $\mathbb{R}$
3. $f(x) = x^2 + 1 - \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$

Exercice 9

Complétez la fonction Python suivante qui pour tout entier n renvoie la valeur de $n!$

```
1. def fac(n) :  
2.     f=....  
3.     for k in range (....) :  
4.         f=.....  
6.     return f
```

Exercice 10

Déterminer la primitive des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^4 + 3x^2 + 2x - 1$
2. $f(x) = \frac{1}{x^3}$
3. $f(x) = e^{-3x+1}$
4. $f(x) = x^n(1-x)$

Exercice 11

Calculer les sommes suivantes :

$$A = \sum_{k=1}^n (2k+1) \quad ; \quad B = \sum_{k=2}^n 5 \times 3^k \quad ; \quad C = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Exercice 12

Les trois sports du triathlon sont : la natation, le cyclisme et la course à pied.

Un athlète décide de pratiquer un sport par jour pour s'entraîner au triathlon. Il commence son entraînement par la natation, au jour 0.

Son entraînement obéit ensuite aux règles suivantes (valables pour tout entier naturel n) :

- si l'athlète a pratiqué la natation le jour n , alors il pratiquera au jour $n+1$:
 - la natation avec probabilité $1/5$
 - le cyclisme avec probabilité $1/5$
 - la course à pied avec probabilité $3/5$
- si l'athlète a pratiqué le cyclisme le jour n , alors il pratiquera au jour $n+1$:
 - la natation avec probabilité $2/5$
 - le cyclisme avec probabilité $3/5$
- si l'athlète a pratiqué la course à pied le jour n , alors il pratiquera au jour $n+1$:
 - le cyclisme avec probabilité $1/5$
 - la course à pied avec probabilité $4/5$

Pour tout entier naturel n , on désigne par :

- A_n l'évènement « l'athlète s'entraîne à la natation le jour n » et par a_n la probabilité de A_n .
- B_n l'évènement « l'athlète s'entraîne au cyclisme le jour n » et par b_n la probabilité de B_n .
- C_n l'évènement « l'athlète s'entraîne à la course à pied le jour n » et par c_n la probabilité de C_n .

1. Que valent $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1$?
2. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n.$$

Exprimer de même les probabilités b_{n+1} et c_{n+1} en fonction des probabilités a_n, b_n et c_n .

Exercice 13

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \frac{-x^2 + 3x}{x-1}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de f à gauche et à droite en 1.
2. En déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale dont on donnera l'équation.
3. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$ et en $+\infty$

Exercice 14

Déterminer les réels a et b pour que

$$f(x) = \frac{x+7}{x^2+2x-3} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3}$$

Exercice 15

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par ses deux premiers termes $u_0 = -\frac{1}{2}$ et $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n , par la relation :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n + 3$$

1. Calculer u_2 et u_3 .
2. On considère le programme Python suivant.
Quelle instruction faut-il ajouter aux lignes 6 et 7 pour que ce programme calcule et affiche la valeur de u_n , l'entier n non nul étant donné par l'utilisateur ?

```
1. n=int(input('entrer la valeur de n :'))
2. v=-1/2
3. u=1
4. for k in range(...):
5.     a=u
6.     u=...
7.     v=...
8. print(u)
```

3. On désire modifier le programme précédent afin de pouvoir représenter graphiquement les 20 premiers termes de la suite.
Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il mémorise les valeurs u_0 à u_{20} et qu'il représente graphiquement ces termes.

```
1. import numpy as np
2. import matplotlib.pyplot as plt
3. x=np.arange(21)
4. u=np.zeros(21)
5. u[0]=...
6. u[1]=...
7. for k ....:
8.     u[k]=...
9. plt.plot(...,'ko')
```

Exercice 16

Déterminer les points d'intersection puis la position relative des courbes représentatives des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -x^2 + 3x + 4 \quad \text{et} \quad g(x) = 2x + 1$$

Exercice 17

On effectue des tirages dans trois urnes :

- Une urne blanche contient 1 boule blanche et 3 boules noires.
- Une urne noire contient 3 boules noires et 1 boule verte.
- Une urne verte contient 1 boule noire et 3 boules vertes.

Pour le premier tirage, on choisit une urne au hasard, on y prend une boule, on note sa couleur puis on remet la boule dans l'urne dont elle provient.

Le second tirage a lieu dans l'urne ayant la même couleur que la première boule obtenue au premier tirage : on y prend une boule, on note sa couleur puis on remet la boule dans l'urne dont elle provient.

Pour $n \in \{1, 2\}$ on désigne par : B_n l'événement : " le n -ième tirage donne une boule blanche ". N_n l'événement : " le n -ième tirage donne une boule noire ". V_n l'événement : " le n -ième tirage donne une boule verte ".

1. Calculer $P(B_1)$, $P(N_1)$ et $P(V_1)$.
2. La première boule tirée est noire, quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne blanche.
3. Etablir que $P(B_2) = \frac{1}{48}$ et $P(N_2) = \frac{7}{12}$

Exercice 18

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système :

$$\begin{cases} 2x + 7y + 3z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 6 \\ x + 5y + 3z = 9 \end{cases}$$

2. Soient a , b et c trois réels.

Donner en fonction de a , b et c la solution du système

$$\begin{cases} x + 2y + 6z = a \\ y + 3z = b \\ -x - 3y + 2z = c \end{cases}$$

d'inconnue (x, y, z) .

Exercice 19

On considère le script Python suivant :

```
1. import numpy as np
2. V=np.array([1,5,8,10,14,15,-5,3,7,2,0,-1,5,7])
3. T=V<3
4. S=np.sum(T)
5. print(T)
6. print(S)
```

Que contiennent les variables T et S à l'issue du programme ?

Quel résultat est affiché après exécution du programme ?

Exercice 20

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1 + \ln(x)}{x}$

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

- Déterminer la limite de f en 0.
Interpréter graphiquement le résultat.
- Montrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = \frac{x}{4}$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.
- Etudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et de $(\mathcal{D})$.
On montrera en particulier que $(\mathcal{D})$ coupe $(\mathcal{C})$ en un point A dont on calculera les coordonnées.

Exercice 21

Une entreprise fabrique en série des balles de ping-pong à l'aide de deux machines A et B . La machine A produit un tiers des éléments, les autres étant produits par la machine B .

Certaines balles fabriquées présentent un défaut. C'est le cas pour 12% des balles fabriquées par la machine A et pour 9% de celles fabriquées par la machine B .

A la sortie des machines les balles arrivent dans le désordre sur un tapis roulant. ce qui fait que si on prend une balle au hasard à la sortie du processus de fabrication, la probabilité qu'elle provienne de A est $\frac{1}{3}$ et celle qu'elle provienne de B est $\frac{2}{3}$.

- (a) On prélève sur le tapis roulant une balle au hasard. On définit les événements :
 - A : la boule provient de la machine A ,
 - B : la boule provient de la machine B ,
 - D : la balle a un défaut.

Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que $P(D) = \frac{1}{10}$.

- (b) On constate que la balle prélevée présente un défaut. Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine A ?

2. On se donne un entier naturel n non nul et on suppose maintenant que l'on prélève n balles au hasard à la sortie du tapis roulant. Les prélèvements successifs sont supposés indépendants les uns des autres. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de balles défectueuses prélevées.
 - (a) Reconnaître la loi de X . Donner les valeurs prises par X et pour chacune de ces valeurs k la valeur de $P(X = k)$.
 - (b) Déterminer, en fonction de n , les valeurs de $E(X)$ et de $V(X)$.

Exercice 22

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

$$(a) u_n = -3n^2 - n + 8 \quad (b) u_n = \frac{(n+1)(3-n)}{2n^2+1} \quad (c) u_n = 3n + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad (d) u_n = 7^n - 4^n \quad (e) u_n = \frac{5^n + 1}{2^n - 2}$$

Exercice 23

On considère le polynôme $P(x) = 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 6x - 12$

1. Montrer que 1 et -2 sont racines de P .
2. (a) Justifier qu'il existe un polynôme Q tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x) = (x-1)(x+2)Q(x)$$

- (b) Quel est le degré de Q ?
- (c) Déterminer le polynôme Q .
3. Résoudre l'équation $P(x) = 0$
4. Déterminer le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$ en fonction des valeurs de x .

Exercice 24

Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau suivant :

x_i	-2	-1	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,10	0,35	0,15	0,25	0,15

1. Vérifier que cela définit bien la loi d'une variable aléatoire.
2. Tracer la fonction de répartition de X .
3. Calculer $P(X \leq 0)$, $P(X \geq 1)$, $P(-2 < X \leq 2)$.
4. Déterminer l'espérance et la variance de X .
5. On pose $Y = 2 - 3X$. Déterminer l'espérance et la variance de Y .
6. On pose $Z = X^2 - X$. Donner, sous forme d'un tableau, la loi de Z .

Exercice 25

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$

1. Déterminer la convexité de f .
2. Montrer que la courbe de f admet un unique point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 26

On souhaite réaliser un programme qui prend en entrée un entier n et qui renvoie le plus entier k tel que $k^2 + k \geq n$.

Recopier et compléter le programme suivant pour qu'il réalise une telle tâche :

```

1. n=int(input('entrer la valeur de n :'))
2. k=0
3. s=0
4. while.... :
5.     k=....
6.     s=....
7. print(....)

```

Exercice 27

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^2 (t^2 - 3t + 2)dt, \quad I_2 = \int_0^1 e^{-t}dt, \quad I_3 = \int_e^3 \frac{1}{t \ln(t)}dt, \quad I_4 = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t}dt$$
$$I_5 = \int_0^1 \frac{e^t}{e^t + 1}dt, \quad I_6 = \int_0^2 \frac{2t+1}{t^2+t+1}dt, \quad I_7 = \int_0^1 te^{1-t^2}dt, \quad I_8 = \int_0^1 \frac{2t+1}{(t^2+t+3)^3}dt$$

Exercice 28

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A = I + J$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Calculer J^2 et J^3 .
Que vaut J^k pour $k \geq 3$?
3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$A^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2$$

4. En déduire les 9 coefficients de A^n .

Exercice 29

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 2 - \frac{1}{2} \ln(x) - x$

1. Calculer la limite de f à droite en 0 et en $+\infty$
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$ puis dresser le tableau des variations de f sur $]0, +\infty[$.
3. Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$.
On la note α .
4. Justifier que : $\alpha \in [1, e]$

Exercice 30

On considère deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies à l'aide de leurs premiers termes $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ et les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = 2a_n + b_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = 2b_n$$

1. Justifier que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite remarquable. En déduire, pour tout entier naturel n , une expression de b_n en fonction de n .
2. Etablir que pour tout entier naturel n , on a : $a_{n+1} = 2a_n + 2^n$
3. Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $c_n = \frac{a_n}{b_n}$, pour tout entier n .
 - (a) Justifier que $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et donner son premier terme.
 - (b) En déduire une expression de c_n en fonction de n pour tout entier naturel n .
 - (c) Déduire des questions précédentes que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n = n2^{n-1}$.

Exercice 31

Une urne contient 12 boules dont 5 blanches et 7 rouges, indiscernables au toucher.

On tire 4 boules successivement sans remise.

Pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ on notera R_i l'événement "La $i^{\text{ième}}$ boule tirée est rouge".

1. Quelle est la probabilité que les 4 boules tirées soient rouges ?
2. Quelle est la probabilité qu'une boule rouge apparaisse pour la première fois au 3^{ième} tirage ?

Exercice 32

On considère le script Python suivant :

```
1. n = 1
2. c = 1-(2**n-1)/3**(n-1)
3. while c < 0.95 :
4.     n = n + 1
5.     c = 1-(2**n-1)/3**(n-1)
6. print(n)
```

Après exécution, on obtient l'affichage suivant :

11.

Interpréter le résultat.

Exercice 33

Déterminer la dérivée puis les variations des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2x$ sur $] -1, 1[$
2. $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 34

Soient les matrices carrées : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $A^2 = 3I - 2A$.
2. Montrer qu'il existe un réel a tel que $AH = aH$.
3. Montrer qu'il existe un réel b tel que $A = I + bH$.

On considère la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} b_0 = 0 \\ \text{Pour tout entier naturel } n, \quad b_{n+1} = -3b_n + 2. \end{cases}$$

4. Sans calculer b_n , montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $A^n = I + b_n H$.
5. Calculer b_n en fonction de n .
6. En déduire les 9 coefficients de A^n .

Exercice 35

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 nx^{n-1} dx$
2. $\int_0^{\ln 2} e^{-x} - e^{-2x} dx$
3. $\int_0^1 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx$

Exercice 36

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$. Que pouvez-vous en déduire sur la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f ?
2. Montrer que pour tout réel x on a : $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$.
En déduire la limite de f en $+\infty$. Comment interpréter graphiquement ce résultat ?

Exercice 37

On considère une urne U contenant deux boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher, ainsi qu'une urne V contenant une boule blanche et trois boules noires, elles aussi indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages d'une boule dans ces urnes en procédant comme suit :

- le premier tirage a lieu dans l'urne U .
- tous les tirages s'effectuent avec remise de la boule piochée dans l'urne dont elle provient ;
- si l'on pioche une boule **blanche** lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans **l'autre** urne ;
- si l'on pioche une boule **noire** lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans **la même** urne.

Pour tout entier naturel non nul n , on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches piochées au cours des n premiers tirages.

1. Déterminer la loi de X_1 .
2. (a) Donner les valeurs de :

$$P_{[X_1=0]}(X_2 = 0), \quad P_{[X_1=0]}(X_2 = 1), \quad P_{[X_1=1]}(X_2 = 1), \quad P_{[X_1=1]}(X_2 = 2)$$

- (b) En déduire la loi de X_2
- (c) Vérifier que $E(X_2) = \frac{19}{18}$
3. On rappelle qu'en Python l'instruction `rd.randint(a,b)` simule une variable aléatoire suivant la loi discrète uniforme sur $\llbracket a, b-1 \rrbracket$.
Recopier et compléter les lignes à pointillés du script ci-dessous afin qu'il simule la variable aléatoire X_2 :

```
1. import numpy as np
2. import numpy.random as rd
3. tirage1=rd.randint(1,4)
4. if tirage1<=2 :
5.     res1=1
6.     tirage2=rd.randint(1,5)
7.     if tirage2==1 :
8.         res2=1
9.     else :
10.         res2=0
11. else :
12.     res1=0
13.     tirage2=.....)
14.     if tirage2..... :
15.         res2=....
16.     else :
17.         res2=....
18. X2=....
19. print(X2)
```

Exercice 38

Après avoir étudié l'ensemble de définition des fonctions suivantes, étudier leur parité. Rappeler le cas échéant la propriété graphique de la courbe.

1. $f(x) = 2x - \frac{x}{x^2 - 4}$
2. $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x^2 + 2}$
3. $h(x) = \ln(x^2 + 1)$

Exercice 39

Calculer les sommes suivantes :

$$A = \sum_{k=0}^n (3k + 2) \quad ; \quad B = \sum_{k=1}^n 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \quad ; \quad C = \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln(k)$$

Exercice 40

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = u_n(1 - u_n) \end{cases}$
ainsi que la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(t) = t(1 - t)$.

1. Établir le tableau de variations de f .
2. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et convergente. On note ℓ sa limite.
4. Justifier que $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge à la fois vers ℓ et vers $\ell(1 - \ell)$.
En déduire $\ell = 0$.

Exercice 41

On considère la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = xe^x - 1$

1. Déterminer le tableau des variations de g . On y fera figurer la valeur en 0 et la limite en $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0, +\infty[$.
Vérifier que $\alpha \in]0, 1[$.
3. Recopier et compléter l'algorithme de dichotomie ci-dessous écrit à l'aide de **Scilab** afin qu'il affiche un encadrement de α à 10^{-2} près lorsque a et b sont choisis tels que $\alpha \in [a, b]$.

```
1. import numpy as np
2. def f(x) :
3.     return ....
4. a=....
5. b=....
6. while b-a .... :
7.     m=....
8.     if f(a)*f(m)<=0 :
9.         b=
10.    else :
11.        ....
12. print(....)
```

Exercice 42

Déterminer la primitive des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$
2. $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$
3. $f(x) = \frac{1}{2x + 1}$

Exercice 43

Une mouche se déplace aléatoirement dans un appartement constitué de 3 pièces contiguës A , B et C . A l'instant initial 0, la mouche se trouve dans la pièce B . On suppose que les déplacements qui suivent se font selon le protocole suivant :

- si à un instant n donné la mouche est dans la pièce A ou dans la pièce C alors elle revient dans la pièce B à l'instant $n + 1$;
- si à un instant n donné la mouche est dans la pièce B alors elle y reste à l'instant $n + 1$ avec la probabilité $\frac{1}{2}$, sinon elle va de façon équiprobable dans A ou dans C .

Pour tout entier naturel n , on définit l'événement A_n : « la mouche est dans la pièce A à l'instant n ». On définit de même les événements B_n et C_n . Enfin, on note a_n , b_n et c_n les probabilités respectives de ces événements.

1. Montrer que (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements.
2. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n; \quad b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n \quad \text{et} \quad c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$$

Exercice 44

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln(x)}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

1. Compléter les lignes 5 et 7 du programme Python suivant pour que la fonction f prenne en entrée un réel x et calcule la valeur de $f(x)$.

```
1. import numpy as np
2. import matplotlib.pyplot as plt
3. def f(x) :
4.     if x<1 :
5.         return....
6.     else :
7.         ....
8. x=np.linspace(-2,5,300)
9. y=np.zeros(300)
10. for k in range(300) :
11.     y[k]=f(x[k])
12. plt.plot(x,y)
```

2. Qu'obtient-on lors de l'exécution des lignes 8 à 12 du programme précédent ?

Exercice 45

Etudier le signe des expressions suivantes :

1. $A(x) = (x^2 - 2) \ln(x)$ définie sur $]0; +\infty[$
2. $B(x) = 1 - 2e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 46

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2\ln(x) - x^2$, en $+\infty$ et à droite en 0
2. $f(x) = \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, en $+\infty$
3. $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$, en 0, $+\infty$ et $-\infty$
4. $f(x) = x + 1 - \frac{x}{e^x}$, en $+\infty$ et $-\infty$

Exercice 47

Complétez la fonction Python suivante qui pour tout entier n renvoie la valeur de la somme $S_n = \sum_{k=0}^n k^3$.

```
1. def Somme(n) :
2.     S=....
3.     for k in range (...) :
4.         .....
5.     return S
```

Exercice 48

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4x^4 - 9x^2 + 2 = 0$ en utilisant l'inconnue auxiliaire $X = x^2$.

Exercice 49

Une urne $\mathcal{U}$ contient 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher. on pioche dans l'urne $\mathcal{U}$ successivement et sans remise les quatre boules. On note Z le numéro du tirage auquel est apparue la boule noire.

1. Déterminer la loi de Z ?
On précisera $Z(\Omega)$ et $P(Z = k)$ pour tout $k \in Z(\Omega)$.
2. Donner les valeurs de $E(Z)$ et de $V(Z)$.

Exercice 50

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 sous forme fractionnaire.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Justifier en donnant un argument de convexité que :

$$\forall x \geq 0, \quad \ln(1+x) \leq x.$$

4. Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ $\ln(k+1) - \ln(k) = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$
5. En déduire que pour tout $k \geq 1$: $\ln(1+k) - \ln k \leq \frac{1}{k}$
6. Soit $n \geq 1$. En sommant l'inégalité précédente pour k variant de 1 à n montrer que :

$$\ln(n+1) \leq u_n.$$

7. Quelle est la limite de (u_n) ?

Bonnes vacances !