

Mathématiques
Devoir maison numéro 2

A rendre le jeudi 24 septembre 2026

Exercice 1

On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par

$$g(x) = x^2 + \ln(x) - 2$$

On donne $\ln 2 \approx 0,7$.

1. (a) Calculer la dérivée g' puis étudier les variations de g .
(b) Calculer les limites de g en 0 à droite et en $+\infty$.
(c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ d'inconnue $x > 0$ admet une unique solution que l'on notera α . Justifier que $1 < \alpha < 2$.
(d) Donner le signe de $g(x)$ en établissant les cas $x < \alpha$, $x = \alpha$, $x > \alpha$.
(e) Tracer dans un repère orthonormé l'allure de la courbe représentative de g , en faisant apparaître les points de cette courbe d'abscisse $x = 1$, $x = \alpha$ et $x = 2$.
2. (a) Montrer grâce à une intégration par parties :

$$\int_1^\alpha \ln(x) dx = \alpha \ln \alpha - \alpha + 1$$

- (b) En utilisant la relation vérifiée par α , montrer que :

$$\int_1^\alpha g(x) dx = \frac{8 - 2\alpha^3}{3} - \alpha$$

- (c) Hachurer la zone du plan correspondant à cette intégrale sur le graphe de la question 1.(e).

Exercice 2

On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0, +\infty[\setminus\{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f relativement à un repère orthonormal et on rappelle que $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Allure de $\mathcal{C}_f$

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, puis lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures et par valeurs inférieures.
2. Montrer que f est croissante sur chacun des intervalles $[0, 1[$, $]1, +\infty[$.
3. Préciser l'équation cartésienne de la tangente (T) au point A de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 0.
4. On note B le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $\frac{1}{2}$.
(a) Calculer l'ordonnée de B .
(b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2\left(\frac{2}{\sqrt{e}} - 1\right)x + 1$, passe par les points A et B .
5. On admet que la fonction f est convexe sur $[0, 1[$ et concave sur $]1, +\infty[$.
Que peut-on en déduire sur les positions relatives de $\mathcal{C}_f$, de (D) , et de (T) sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$?
6. Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$ en traçant sur un même schéma les droites (D) et (T) .
On donne $f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1.2$ et on prendra 3 cm pour unité.

Encadrement de la valeur d'une intégrale

On se propose dans cette partie de déterminer des encadrements de l'intégrale I suivante :

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$$

On ne cherchera jamais à calculer cette intégrale.

1. Interpréter l'intégrale I en terme d'aire d'un domaine que l'on hachurera sur le schéma de la question 1.6.
2. Montrer que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad 1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$$

En déduire l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{2} \leq I \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$$

3. Prouver que pour tout réel x dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$$

En déduire que :

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx.$$

4. Effectuer une intégration par parties pour calculer :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x} dx$$

5. En utilisant la question 2.2 montrer que :

$$\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}.$$

En déduire un nouvel encadrement de I .

6. En utilisant la considération géométrique de la question 1.5 justifier l'encadrement :

$$\frac{1}{2} \leq I \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \left[2 \left(\frac{2}{\sqrt{e}} - 1 \right) x + 1 \right] dx$$

En déduire un dernier encadrement de I .

Exercice 3

Pour tout entier naturel n , on définit la fonction h_n sur $[0, 1]$ par la relation suivante :

pour tout réel x de $[0, 1]$, $h_n(x) = \frac{x^n}{x^2 + 3x + 2}$ si n est supérieur ou égal à 1,

$$\text{et } h_0(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}.$$

1. (a) Etablir pour tout réel x de $[0, 1]$, l'inégalité : $x^2 + 3x + 2 \geq 2$.
(b) En déduire que la fonction h_n est continue sur $[0, 1]$ pour tout entier n .

2. On définit pour tout x de $[0, 1]$ la fonction g par $g(x) = \ln \left(\frac{x+1}{x+2} \right)$.

On pose pour tout entier naturel n ,

$$u_n = \int_0^1 h_n(t) dt.$$

- (a) On note g' la dérivée de g . Montrer que pour tout x de $[0, 1]$, on a :

$$g'(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)}.$$

- (b) En déduire que $u_0 = \ln \left(\frac{4}{3} \right)$.

3. On définit pour tout x de $[0, 1]$, la fonction k par $k(x) = \ln(x^2 + 3x + 2)$.

- (a) Soit k' la dérivée de k . Calculer pour tout x de $[0, 1]$, $k'(x)$. En déduire la valeur de $2u_1 + 3u_0$.

- (b) Donner la valeur de u_1 .

4. Calculer $u_2 + 3u_1 + 2u_0$. En déduire la valeur de u_2 .

5. (a) Établir pour tout entier naturel n , l'inégalité suivante : $u_n \geq 0$.

- (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

- (c) Etablir pour tout entier naturel n , l'inégalité : $u_n \leq \frac{1}{2(n+1)}$.

- (d) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

6. (a) Calculer pour tout entier naturel n , $u_{n+2} + 3u_{n+1} + 2u_n$ en fonction de n .

- (b) En utilisant la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$, en déduire pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'encadrement suivant : $\frac{1}{6(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{6(n-1)}$.

- (c) Déterminer la limite de nu_n quand n tend vers $+\infty$.