

Fonctions : généralités

1 Quantificateurs

Notations :

- Le signe " $\forall$ " placé devant une variable x signifie "*quel que soit x ...*".
On l'appelle quantificateur universel.
- Le signe " $\exists$ " placé devant une variable x signifie "*il existe (au moins) un x ...*".
On l'appelle quantificateur existentiel.
- " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$ " se lit : "*quel que soit le réel x , $x^2 + 1$ est strictement positif*" ou "*pour tout réel x , $x^2 + 1$ est strictement positif*".
- " $\exists x \in]0, +\infty[, x^2 - 6x + 1 = 0$ " se lit : "*il existe au moins un réel x strictement positif tel que $x^2 - 6x + 1$ est égal à 0*" (il y a d'ailleurs deux tels x : $3 + 2\sqrt{2}$ et $3 - 2\sqrt{2}$).

Remarque :

Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ sont des symboles mathématiques et ne s'utilisent que dans une proposition ne comportant que des symboles mathématiques.

Il ne s'agit en aucun cas d'une abréviation.

Dans une phrase comportant des mots en français on écrira en toutes lettres " pour tout " et " il existe ".

2 Vocabulaire, représentation graphique d'une fonction

2.1 Ensemble de définition, image, antécédent

Définition

- Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$.
- Définir une fonction f sur $\mathcal{D}$ c'est associer à tout nombre réel x appartenant à $\mathcal{D}$ un nombre réel unique noté $f(x)$.
 - Le nombre réel $f(x)$ est appelé image de x par la fonction f .
 - $\mathcal{D}$ est appelé ensemble (ou domaine) de définition de la fonction f .

Remarque :

La fonction f qui a chaque réel x de $\mathcal{D}$ associe l'unique réel $f(x)$ se note :

$$f \quad \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right)$$

Exemples :

1. Le trinôme $f(x) = x^2 + 2x + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction racine $f(x) = \sqrt{x}$ est définie sur $[0, +\infty[$.

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-2}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Donner les images par f de -1 et de 1.

Exercice 2 :

Donner l'ensemble de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

Définition

- Si un nombre k est l'image d'un nombre x c'est à dire si $f(x) = k$, alors on dit que x est un antécédent de k .
- Les réels admettant au moins un antécédent par f constituent l'ensemble image.

Exemple : Soit $f(x) = x^2$.

$f(2) = 4$ donc 2 est un antécédent de 4. Mais -2 est aussi un antécédent de 4 car $f(-2) = 4$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, donc seuls les réels positifs admettent un antécédent par f .

L'ensemble image de f est donc $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.

Remarque :

- L'image est unique, par contre il peut y avoir plusieurs antécédents.
- Soit $k \in \mathbb{R}$, pour déterminer les antécédents de k par f il faut résoudre l'équation $f(x) = k$.

Exercice 3 :

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

Déterminer les antécédents par f de 1, $\frac{2}{3}$ et -1.

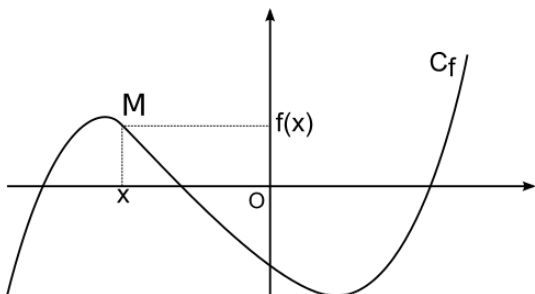
2.2 Représentation graphique

2.2.1 Courbe représentative d'une fonction

Définition

Soit f une fonction de domaine de définition $\mathcal{D}$.

- La représentation graphique $\mathcal{C}$ (ou courbe représentative) de f dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ où x est un réel de $\mathcal{D}$.
- On dit que la courbe $\mathcal{C}$ a pour équation $y = f(x)$



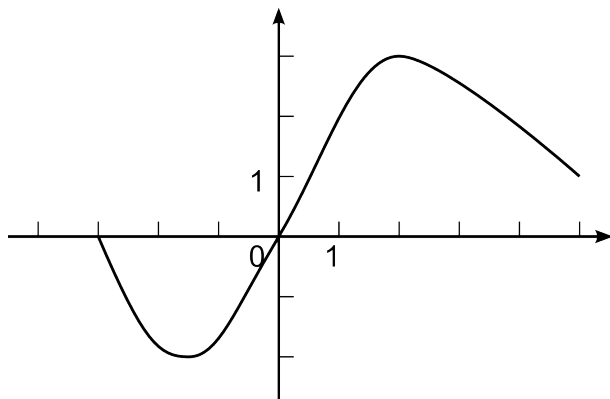
Si M est le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x , son ordonnée est $f(x)$.

Etant donné un point M de coordonnées (x, y) (avec $x \in \mathcal{D}$), M appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si $y = f(x)$.

Remarque :

- L'image d'un réel x est l'ordonnée du point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x .
- Les antécédents d'un réel k sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ d'ordonnée k

Exemple :

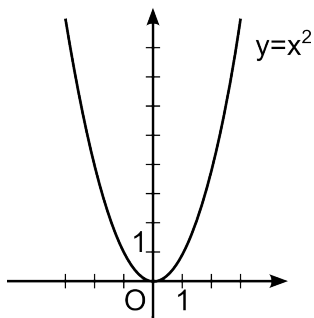


L'ensemble de définition est $\mathcal{D} = [-3, 5]$ et l'ensemble image est $[-2, 3]$,

$f(2) = 3$ et $f(5) = 1$.

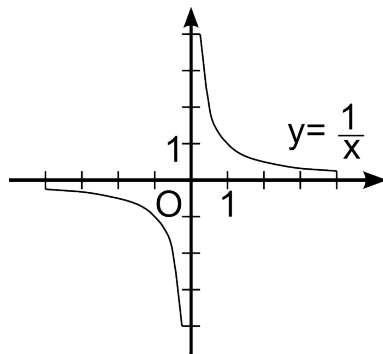
0 admet deux antécédents : 0 et -3.

2.2.2 Courbe représentative des fonctions usuelles



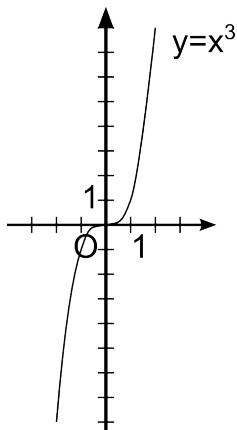
Fonction carrée :

elle est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$



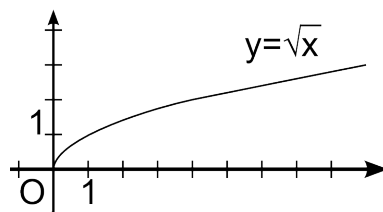
Fonction inverse :

elle est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$



Fonction cube :

elle est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$

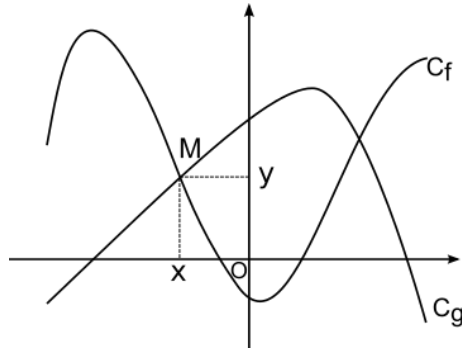


Fonction racine carrée :

elle est définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$

2.2.3 Points d'intersection de deux courbes, position relative

Soient f et g deux fonctions définies sur un même domaine $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives respectives dans un repère.



- Le point $M(x; y)$ appartient à $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $y = f(x)$ et appartient à $\mathcal{C}_g$ si et seulement si $y = g(x)$.

Donc M appartient aux deux courbes si et seulement si $y = f(x) = g(x)$.

Proposition

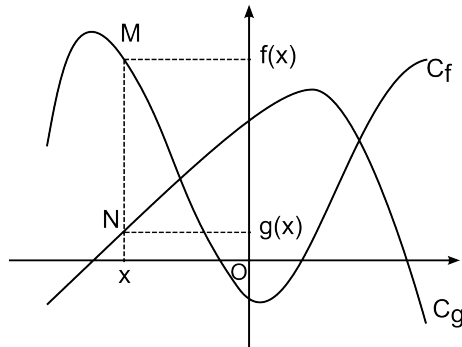
Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{C}_g$ sont les solutions de l'équation

$$f(x) = g(x)$$

- Pour déterminer les ordonnées il faut ensuite déterminer les images par f (ou par g) des solutions précédentes.

- Soit I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}$ et x un réel de I .

On note M et N les points de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x .



Si $y_M \geq y_N$ sur I , $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$ de même si $y_M \leq y_N$ sur I , $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$.

Or $y_M \geq y_N \Leftrightarrow f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0$

Proposition

Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{C}_g$ on étudie le signe de $f(x) - g(x)$.

- Si $f(x) - g(x) \geq 0$ sur un intervalle I alors $f(x) \geq g(x)$ et $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$ sur I .
- Si $f(x) - g(x) \leq 0$ sur un intervalle I alors $f(x) \leq g(x)$ et $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$ sur I .

Exercice 4 :

Déterminer les points d'intersection puis la position relative des courbes représentatives des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ et $g(x) = 2x + 1$

2.3 Définition et représentation graphique d'une fonction à l'aide de Python

2.3.1 Définition d'une fonction en Python

- La commande

```
def f(x) :  
    return ....
```

permet de créer la fonction, nommée ici f , qui à chaque variable x associe la quantité définie après **return**.

L'appel de la fonction provoque l'affichage de la valeur retournée.

- Il se peut que la construction de l'expression de $f(x)$ nécessite des instructions. Elles sont alors écrites en indentation et la quantité retournée doit toujours figurer après **return** :

```
def f(x) :  
    -instructions-  
    return ....
```

- Une fonction peut posséder plusieurs variables :

```
def f(x1,x2,...,xn) :  
    -instructions-  
    return ....
```

Exemples :

- Le programme suivant :

```
1. def f(x) :  
2.     return x**2+x+1
```

permet de définir la fonction $f(x) = x^2 + x + 1$

- Le programme suivant :

```
1. def f(x) :  
2.     if x<0 :  
3.         return -2*x+1  
4.     else :  
5.         return 3*x+2
```

permet de définir la fonction $\begin{cases} f(x) = -2x + 1 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = 3x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

- Le programme suivant :

```
1. def delta(a,b,c) :  
2.     return b**2-4*a*c
```

permet de calculer le discriminant à partir des coefficients d'un polynôme de degré 2.

Remarque :

La fonction racine carrée est disponible dans la librairie **numpy**. On y accède grâce à la commande :

```
import numpy as np  
np.sqrt(x)
```

2.3.2 Construction de vecteurs :

On importe la bibliothèque `numpy` avec la commande suivante : `import numpy as np`

On appelle vecteur à une ligne et n colonnes (où $n \in \mathbb{N}^*$) une liste ordonnée de n coordonnées :

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

En Python les tableaux de nombres sont de type `array`.

- On construit le vecteur $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ à l'aide de la commande :
`u=np.array([u1,u2,...,un])`
- La commande `np.ones(n)` définit le vecteur à n composantes toutes égales à 1.
- La commande `np.zeros(n)` définit le vecteur à n composantes toutes égales à 0.

- La commande
`np.arange(a,b,r)`
renvoie un vecteur dont les éléments sont en progression arithmétique de raison r , de a inclus à b exclus.
- La commande `np.arange(a,b,1)` peut s'écrire plus simplement `np.arange(a,b)`

Remarque :

L'idée est la même que pour l'énumérateur `range` sauf que dans ce cas a , b et r ne sont pas nécessairement des entiers.

La commande

`np.linspace(a,b,n)`

renvoie un vecteur contenant n coefficients en progression arithmétique, le premier étant le réel a et le dernier le réel b .

Exemples :

1. `np.array([-4,3,1,5])` renvoie :
`array([-4, 3, 1, 5])`
2. `np.ones(5)` renvoie :
`array([1., 1., 1., 1., 1.])`
3. `np.zeros(5)` renvoie :
`array([0., 0., 0., 0., 0.])`
4. `np.arange(0.5,2.3,0.4)` renvoie :
`array([0.5, 0.9, 1.3, 1.7, 2.1])`
5. `np.arange(-3.5,4)` renvoie :
`array([-3.5, -2.5, -1.5, -0.5, 0.5, 1.5, 2.5, 3.5])`
6. `np.linspace(-2,4,8)` renvoie :
`array([-2.0, -1.14285714, -0.28571429, 0.57142857, 1.42857143, 2.28571429, 3.14285714, 4.0])`

2.3.3 Image d'un vecteur par une fonction

- Si u est un vecteur et si f est une fonction répertoriée dans la librairie `numpy` de Python, la commande `np.f(u)` renvoie un vecteur de même taille que u dont les coordonnées sont les images par f de celles de u .
- De même si f est une fonction définie précédemment la commande `f(u)` renvoie un vecteur de même taille que u dont les coordonnées sont les images par f de celles de u .

Exemples :

On considère la variable u définie par la commande :

```
u=np.linspace(0,4,11)
```

La variable u contient le vecteur :

```
array([0. , 0.4, 0.8 , 1.2, 1.6. , 2. , 2.4. , 2.8, 3.2 , 3.6, 4. ])
```

`u**2+3*u-2` renvoie :

```
array([-2. , -0.64,  1.04,  3.04,  5.36,  8. , 10.96, 14.24, 17.84, 21.76, 26. ])
```

`np.sqrt(u)` renvoie :

```
array([0.          , 0.63245553, 0.89442719, 1.09544512, 1.26491106,  
       1.41421356, 1.54919334, 1.67332005, 1.78885438, 1.8973666 ,  2.          ])
```

Supposons la fonction f définie par le programme :

```
1. def f(x) :  
2.     return x**2+3*x-2
```

`f(u)` renvoie :

```
array([-2. , -0.64,  1.04,  3.04,  5.36,  8. , 10.96, 14.24, 17.84, 21.76, 26. ])
```

2.3.4 Représentation graphique d'une fonction

On importe la bibliothèque `matplotlib.pyplot` avec la commande suivante :

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

On suppose que la variable x contient le vecteur $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et que la variable y contient le vecteur $(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

La commande

```
plt.plot(x,y)
```

permet de tracer la ligne brisée reliant les points de coordonnées (x_i, y_i) .

L'instruction

```
plt.show()
```

en commande l'affichage.

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$, avec $a < b$.

On définit :

`x=np.arange(a,b,r)` ou `x=np.linspace(a,b,n)`

et on note $x_1, x_2, \dots, x_n$ les composantes du vecteur x .

Si le pas r du vecteur x est suffisamment petit ou si n est suffisamment grand, la ligne brisée joignant les points $(x_i, f(x_i))$ pour $1 \leq i \leq n$, donnera l'illusion de la courbe représentative de f sur $[a, b]$.

Pour représenter graphiquement une fonction f sur un intervalle $I = [a, b]$:

- On importe les librairies **numpy** (avec le raccourci **np**) et **matplotlib.pyplot** (avec le raccourci **plt**).
- On construit la variable x qui contient un vecteur d'extrémités a et b dont les composantes sont très proches les unes des autres à l'aide des commandes :

`x=np.linspace(a,b,200)` ; ici on a choisi 200 composantes

ou

`x=np.arange(a,b,0.01)` ; ici on a choisi un pas de 0.01

- On construit ensuite une variable y qui va contenir le vecteur $f(x)$.
- On commande

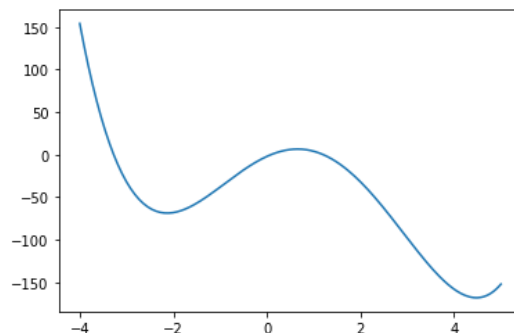
```
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

Exemple :

Le programme :

```
1. import numpy as np
2. import matplotlib.pyplot as plt
3. def f(x) :
4.     return x**4-4*x**3-16*x**2+25*x-2
5. x=np.linspace(-4,5,200)
6. y=f(x)
7. plt.plot(x,y)
8. plt.show()
```

renvoie le graphique :



et permet d'obtenir la représentation graphique de la fonction $f(x) = x^4 - 4x^3 - 16x^2 + 25x - 2$ sur l'intervalle $[-4, 5]$.

3 Fonction valeur absolue

3.1 Définition, propriétés, représentation graphique

Définition

La fonction valeur absolue, notée $x \mapsto |x|$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} |x| = x & \text{si } x \geq 0 \\ |x| = -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemples :

- $|5|=5$; $|-5|=5$
- $|\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$ car $\sqrt{2}-1 \geq 0$
- et $|3-\pi| = -(3-\pi) = \pi-3$ car $3-\pi < 0$.

Proposition

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \max(x, -x)$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|-x| = |x|$.
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$

Exemple

$$|1-\sqrt{3}| = |\sqrt{3}-1| = \sqrt{3}-1 \text{ car } \sqrt{3}-1 \geq 0$$

Proposition

- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |x \times y| = |x| \times |y|$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^*, \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$

Exemples

- $|-2x^2| = |-2| \times |x^2| = 2x^2$ car $x^2 \geq 0$.
- $\left| \frac{-3}{x+1} \right| = \frac{|-3|}{|x+1|} = \frac{3}{|x+1|}$

Attention

Il n'existe pas de formule équivalente pour l'addition et la soustraction :

$$|(-7)+3| = |-4| = 4 \text{ tandis que } |-7|+|3| = 7+3 = 10$$

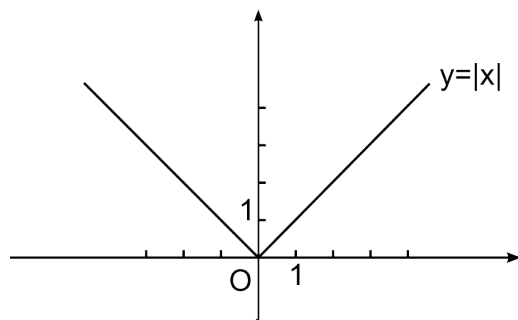
Proposition : Inégalité triangulaire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |x+y| \leq |x| + |y|$$

Remarque :

La fonction valeur absolue est disponible en **Python** dans la librairie **numpy**. On y accède grâce à la commande :

```
import numpy as np
np.abs(x)
```



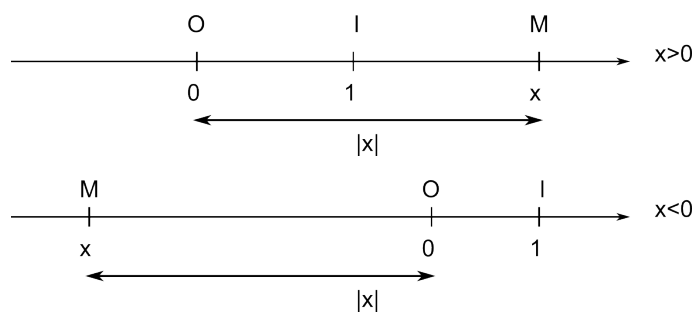
3.2 Lien avec la distance dans $\mathbb{R}$

Soit une droite munie d'une origine O et d'une unité OI

Proposition

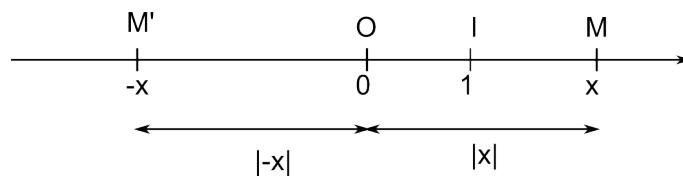
Pour tout réel x , la valeur absolue de x est la distance du point M d'abscisse x à l'origine O .

$$\text{ainsi } |x| = d(x, 0) = d(0, x)$$



Remarque

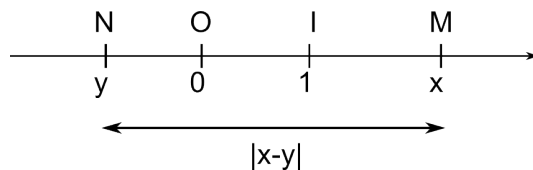
Soit x un réel et M et M' les points d'abscisses x et $-x$; $OM = OM'$ donc on retrouve $|x| = |-x|$



Proposition

Pour tous réels x et y , $|x - y|$ est la distance entre le point M d'abscisse x et le point N d'abscisse y .

$$\text{ainsi } |x - y| = d(x, y) = d(y, x)$$



Remarque

Comme $MN = NM$ on retrouve $|x - y| = |y - x|$.

Exercice 5 :

Exprimer les écritures suivantes sous la forme $d(x, \dots)$:

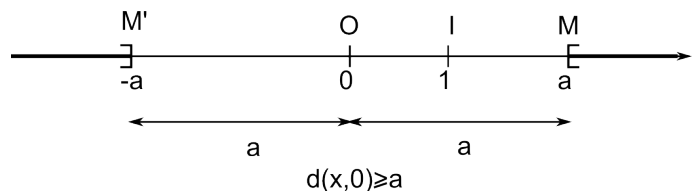
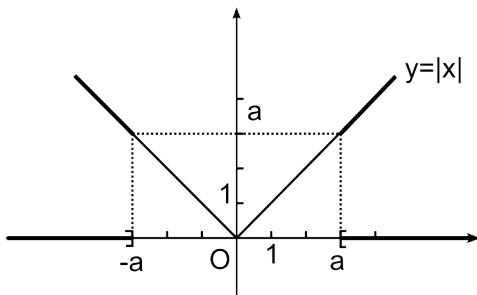
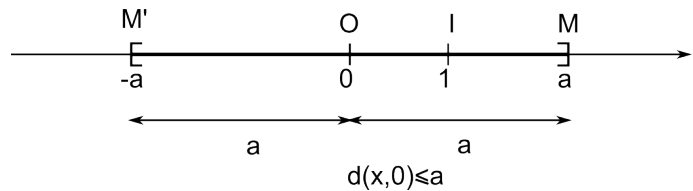
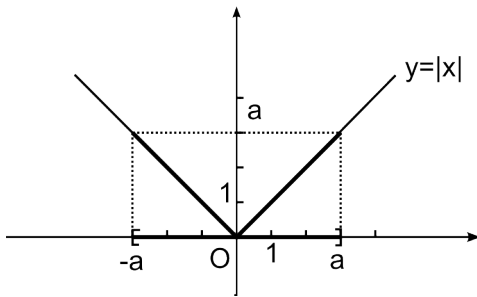
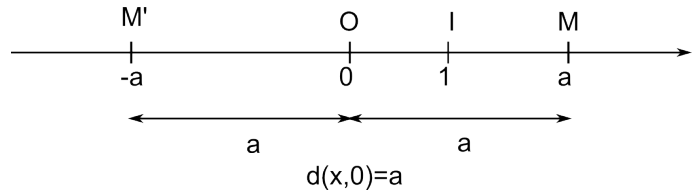
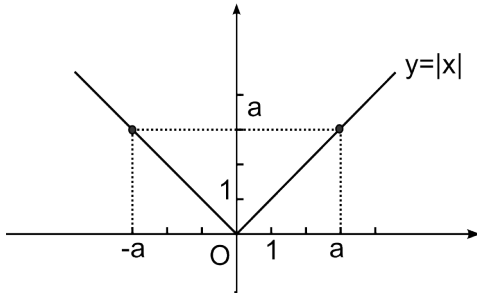
$$|x - 3| \quad ; \quad \left|x + \frac{1}{2}\right| \quad ; \quad |5 - x| \quad ; \quad |\sqrt{3} + x| \quad ; \quad \left|-x + \frac{3}{5}\right|$$

Résolution d'équations et d'inéquations

Proposition

Soit a un réel strictement positif.

- $|x| = a \Leftrightarrow x = a \text{ ou } x = -a$
- $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$
- $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ ou } x \geq a \Leftrightarrow x \in]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$



Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$a) |x - 2| = 3 \quad b) |x + 5| = 12 \quad c) |x - 5| = -2 \quad d) |x + 3| = |x - 2|$$

$$e) |x| \leq 9 \quad f) |x - 2| \leq 3 \quad g) |x| > 4 \quad h) |x - 2| > 3$$

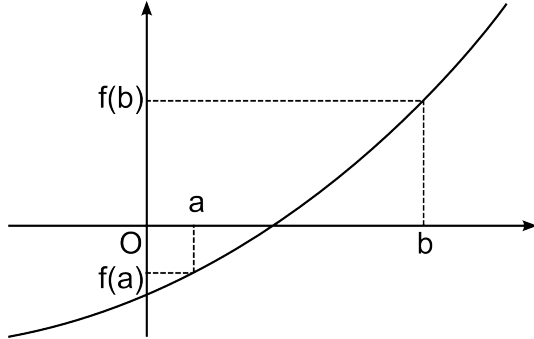
4 Sens de variation, parité, extrema, bornes

4.1 Sens de variation d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

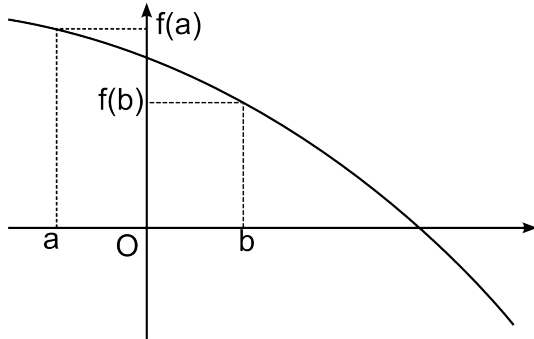
Définition

- f est une fonction croissante (respectivement strictement croissante) sur I si : pour tout couple (a, b) de réels de I , si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$ (resp $f(a) < f(b)$).



Les images des réels de I sont rangées dans le même ordre que ces réels.

- f est une fonction décroissante (respectivement strictement décroissante) sur I si : pour tout couple (a, b) de réels de I , si $a < b$ alors $f(a) \geq f(b)$ (resp $f(a) > f(b)$).

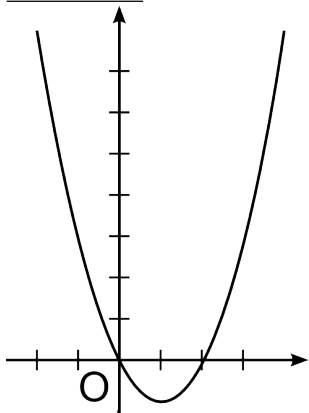


Les images des réels de I sont rangées dans le sens contraire de celui de ces réels.

Définition

Une fonction est dite monotone (resp strictement monotone) sur I si elle est croissante ou décroissante (resp strictement croissante ou strictement décroissante) sur I .

Exemple :



La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x$ est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ et strictement décroissante sur $] -\infty, 1]$. On résume ces résultats dans le tableau de variation de f

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

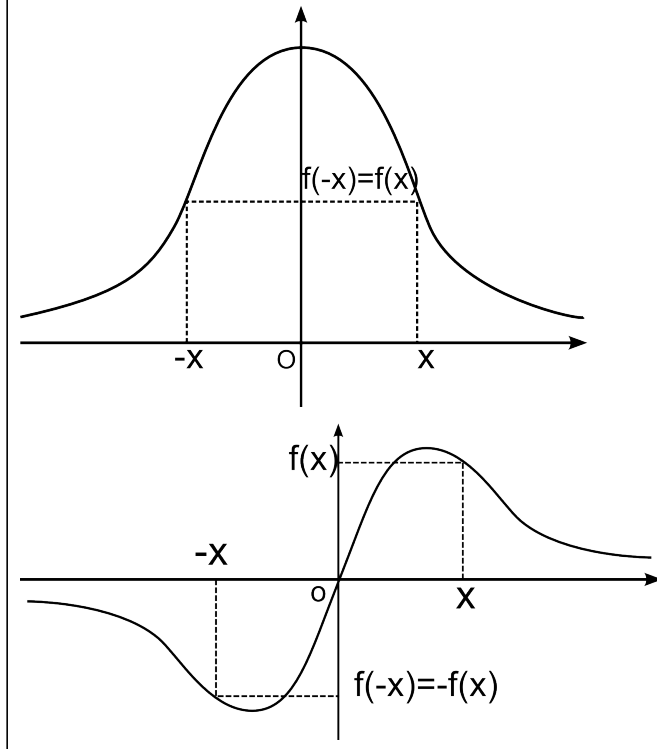
Exercice 7 :

1. Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[\quad \frac{1}{x^2 + 2x + 1} \leq \frac{1}{x^2}$
2. Montrer que : $\forall x \in [1, +\infty[\quad \sqrt{x^2 - 2x + 1} \leq \sqrt{x^2 - x}$

4.2 Fonction paire, fonction impaire

Soit f une fonction définie sur un ensemble de définition $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

Définition



On dit que f est une fonction paire si :

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad -x \in \mathcal{D} \text{ et } f(-x) = f(x).$$

$\mathcal{C}$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

On dit que f est une fonction impaire si :

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad -x \in \mathcal{D} \text{ et } f(-x) = -f(x).$$

$\mathcal{C}$ admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

Exemples :

La fonction carrée et la fonction valeur absolue sont paires.

La fonction cube et la fonction inverse sont impaires.

Remarques :

- La condition $x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$ signifie que l'ensemble $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0.
- La négation de

$$\text{" pour tout } x \in \mathcal{D}, \quad f(-x) = f(x) \text{"}$$

est :

$$\text{"il existe un } x \in \mathcal{D} \text{ tel que } f(-x) \neq f(x) \text{"}.$$

Une fonction n'est pas paire s'il existe un réel x de $\mathcal{D}$ pour lequel $f(-x) \neq f(x)$. De même une fonction n'est pas impaire s'il existe un réel x de $\mathcal{D}$ pour lequel $f(-x) \neq -f(x)$.

- pour montrer qu'une fonction est paire on montrera que :

$$\text{pour tout } x \text{ de } \mathcal{D}, \quad f(-x) = f(x)$$

(il ne faut pas donner de valeur particulière à x).

- pour montrer qu'une fonction est impaire on montrera que :

$$\text{pour tout } x \text{ de } \mathcal{D}, \quad f(-x) = -f(x)$$

- pour montrer qu'une fonction n'est ni paire ni impaire on cherche :

$$\text{une valeur } x_0 \text{ de } \mathcal{D} \text{ telle que : } f(-x_0) \neq f(x_0) \text{ et } f(-x_0) \neq -f(x_0)$$

Exercice 8 :

Après avoir étudié l'ensemble de définition des fonctions suivantes, étudier leur parité .

1. $f(x) = 2x - \frac{x}{x^2 - 4}$

2. $g(x) = \frac{-3x^2 + 1}{x^2 + 2}$

3. $h(x) = x^3 - 2x - 1$

4.3 Extrema

Definition

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$.

- Soit x_0 un réel de $\mathcal{D}$. On dit que f admet un maximum (respectivement un minimum) en x_0 si

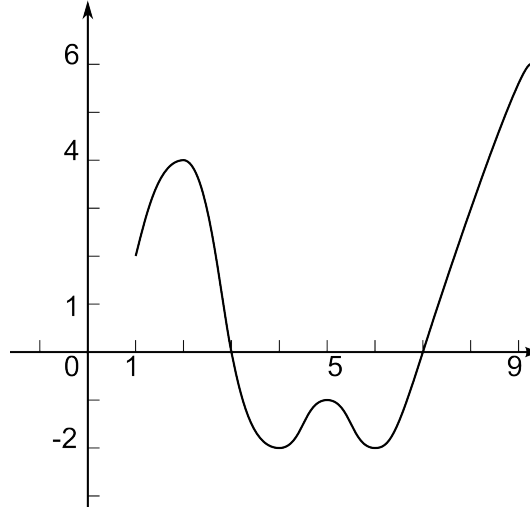
$$\forall x \in \mathcal{D} \quad f(x) \leq f(x_0)$$

$$(\text{respectivement } \forall x \in \mathcal{D} \quad f(x) \geq f(x_0))$$

- Lorsque cette propriété n'est pas réalisée sur $\mathcal{D}$ tout entier mais sur un intervalle ouvert I contenant x_0 , on dit que f admet un extremum local (maximum local ou minimum local en x_0 .)

Exemples :

1. La fonction carrée admet 0 pour minimum, atteint en 0 et n'a pas de maximum.
2. On considère la fonction f de représentation graphique :



f admet :

- un maximum atteint en 9 qui vaut 6
- un minimum atteint en 4 et 6 qui vaut -2
- deux maxima locaux atteints en 2 et 5 qui valent respectivement 4 et -1
- un minimum local atteint en 1 qui vaut 2

Exercice 9 :

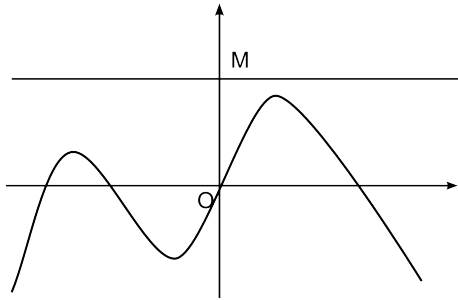
Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Montrer que f atteint un maximum en 0.

4.4 Fonctions bornées

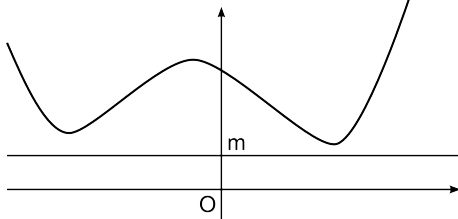
Definition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .



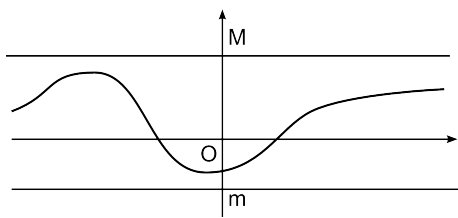
f est dite majorée sur I s'il existe un réel M tel que pour tout $x \in I$:

$$f(x) \leq M$$



f est dite minorée sur I s'il existe un réel m tel que pour tout $x \in I$:

$$f(x) \geq m$$



f est dite bornée sur I si f est la fois majorée et minorée sur I ie s'il existe deux réels M et m tels que pour tout $x \in I$:

$$m \leq f(x) \leq M$$

Remarques :

- la propriété f majorée sur I s'écrit avec des quantificateurs :

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in I, f(x) \leq M$$

- Les réels M et m sont des constantes et ne dépendent pas de x .
- Si M est un majorant de f sur I , tout réel $M_1 \geq M$ est également un majorant de f sur I .
En particulier on ne confondra pas maximum et majorant.
Le maximum (s'il existe) est le plus petit des majorant.
De même si m est un minorant de f sur I , tout réel $m_1 \leq m$ est un minorant de f sur I .

Exercice 10 :

- Montrer que la fonction $f : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est majorée sur $\mathbb{R}_+^*$ par tout réel positif.
- Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ par 0 et 1.
- Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant : $\forall x > 0, 1 + \frac{1}{x} \leq f(x) \leq x$
La fonction f est-elle minorée ? majorée ?

5 Opérations sur les fonctions

5.1 Somme, produit, quotient de fonctions

f et g sont deux fonctions définies sur le même ensemble de définition $\mathcal{D}$.

Opération	Notation	Fonctions définie pour $x \in \mathcal{D}$
Produit par un réel k	kf	$(kf)(x) = k \times f(x)$
Somme de fonctions	$f + g$	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
Produit de fonctions	$f \times g$	$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$
Inverse de fonction (si f ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$)	$\frac{1}{f}$	$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$
Quotient de fonctions (si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$)	$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

5.2 Fonctions composées

Définition

Soit f une fonction définie sur l'ensemble I et g une fonction définie sur l'ensemble J , tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$.

On appelle fonction composée des fonctions f et g la fonction notée $g \circ f$ définie sur I par

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)].$$

Remarque :

La construction de l'image du réel x par $g \circ f$ respecte le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 I & \longrightarrow & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 x & \mapsto & y = f(x) & \mapsto & g(y) = g[f(x)] \\
 x & \longmapsto & & & (g \circ f)(x)
 \end{array}$$

Exercice 11 :

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \quad \text{et} \quad g(x) = 2x - 1.$$

Déterminer l'expression de $f \circ g$ puis celle de $g \circ f$. Que remarque-t-on ?

Exercice 12 :

Ecrire les fonctions suivantes sous la forme $g \circ f$.

$$h(x) = \sqrt{2x + 3} \quad \text{et} \quad k(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}.$$

5.3 Fonction bijective

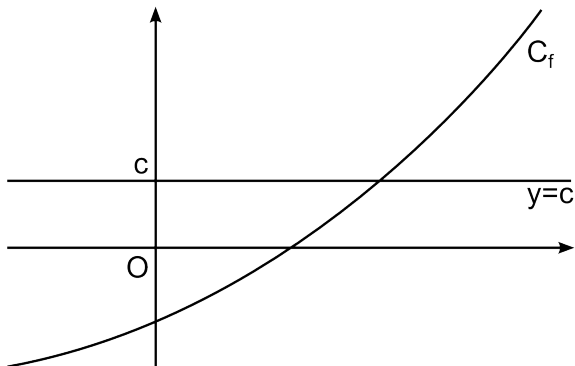
Définition

Soient I et J deux intervalles et f une fonction définie sur I .

On dit que f réalise une bijection de I sur J si :

- pour tout réel x de I , le réel $f(x)$ appartient à J
- pour tout réel y de J l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans I . (ie tout réel y de J admet un unique antécédent sur I .)

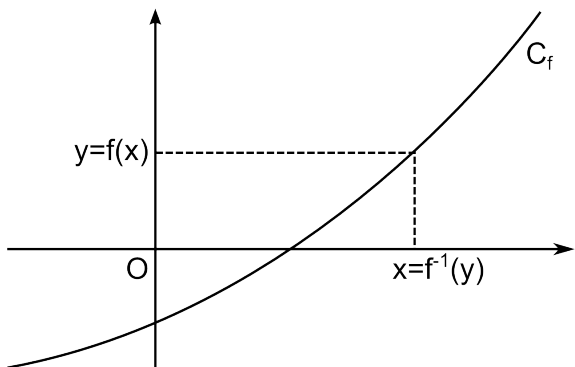
On dit aussi que f est une fonction bijective.



graphiquement pour tout réel c de J , la droite d'équation $y = c$ coupe la courbe représentative de f en un seul point.

Si f est bijective de I sur J alors on peut construire une fonction définie sur J qui à tout réel y de J associe l'unique solution sur I de l'équation $f(x) = y$.

Cette fonction est appelée fonction réciproque de f et notée f^{-1} .



$$\begin{cases} y = f(x) \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in J \end{cases}$$

Exemple :

Pour tout $y \in [0; +\infty[$, l'équation $x^2 = y$ admet une unique solution positive $\sqrt{y}$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x \in [0; +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{y} \\ y \in [0; +\infty[\end{cases}$$

La restriction de la fonction carrée à l'intervalle $[0; +\infty[$ et la fonction racine carrée sont des bijections réciproques.

Remarque

Soit f une bijection de I sur J et f^{-1} sa bijection réciproque.

$$\forall x \in I, \quad f^{-1} \circ f(x) = x$$

$$\forall y \in J, \quad f \circ f^{-1}(y) = y$$

Exercices : Généralités sur les fonctions

1) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{x-4}$

2. $g(x) = \frac{2x-1}{x^2+3x-4}$

3. $h(x) = \sqrt{x^2-3x-4}$

2) Pour tout réel x non nul on pose :

$$f(x) = \frac{x - \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x}}$$

1. Simplifier $f(x)$

2. Déterminer les images par f de $1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

3. Déterminer les antécédents par f de $1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

3) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{4}{1+x^2}$$

de courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

1. Déterminer les coordonnées des points de la courbe d'abscisses -2 et 3.

2. Déterminer les coordonnées des points de la courbe d'ordonnées 2 et 0.

3. Les points $A(0;5)$ et $B(2;4)$ appartiennent-ils à la courbe représentative de f ?

4) Comparer x, x^2, x^3 et $\sqrt{x}$:

1. si $0 \leq x \leq 1$

2. si $x \geq 1$.

5) Soit f la fonction définie sur $] -\infty ; -1[\cup] -1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4x - 1}{x + 1}$$

On note $\mathcal{H}$ la courbe représentative de f .

1. Vérifier que pour tout $x \neq -1$:

$$f(x) - (2x + 1) = \frac{(x-1)(x+2)}{x+1}$$

2. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = 2x + 1$.

(a) Indiquer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{D}$.

(b) Préciser la position relative de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{D}$.

6)

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 2$$

et $\mathcal{P}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- (a) Donner le tableau de variation de la fonction f .
- (b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et de l'axe des abscisses.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$$

et $\mathcal{P}'$ sa courbe représentative .

- (a) Donner le tableau de variation de la fonction g .
 - (b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}'$ et de l'axe des abscisses.
3. (a) Indiquer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
- (b) Préciser la position relative de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
4. Tracer $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sur un même graphique. On prendra comme unité 1cm en abscisse et en ordonnée.
- On donne $\sqrt{2} \approx 1.41$.

7) On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$$

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Compléter le programme Python ci dessous afin qu'il affiche la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-4,4]$:

```
1. import numpy as np
2. import matplotlib.pyplot as plt
3. def f(x) :
4.     return....
5. x=....
6. y=....
7. plt.plot(x,y)
8. plt.show()
```

8) Résoudre dans $\mathbb{R}$

- 1. $|2x - 1| = 3$
- 2. $|x + 2| \leq 10$
- 3. $|x - 3| = -5$
- 4. $|3x + 2| \geq 5$
- 5. $|2x - 4| = |x + 1|$

9) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -u_n^2 + 2u_n$

1. Donner les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(x) = -x^2 + 2x$
 2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.
-

10) Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-4; 4]$. On sait que f est croissante sur $[0; 1]$ et décroissante sur $[1; 4]$. On donne également $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(4) = -4$.

Donner le tableau de variation de f sur $[-4; 4]$ si :

1. f est paire.
 2. f est impaire.
-

11) Etudier la parité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$ définie sur $\mathbb{R}$
 2. $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 5}$ définie sur $\mathbb{R}$
 3. $f(x) = x^3 - 3x - \frac{2}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$
 4. $f(x) = x^2 + 3x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$
-

12) Ecrire les fonctions suivantes sous la forme $g \circ f$:

1. $u(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$
 2. $v(x) = 2 + \frac{1}{x^2 + 1}$
-

13) Soient f la fonction définie sur $I =]-1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$

1. Montrer que pour tout réel y de l'intervalle $J =]-\infty; 2[$

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{y + 1}{2 - y}$$

2. En déduire que f réalise une bijection de I sur J et donner sa bijection réciproque f^{-1}
3. Vérifier que :

$$\forall x \in I, \quad f^{-1} \circ f(x) = x$$

$$\forall y \in J, \quad f \circ f^{-1}(y) = y$$