

Fonctions : limites et continuité

1 Limites

1.1 Limite d'une fonction en un point

1.1.1 Limite finie en un point

Soit I un intervalle, a un élément de I et f une fonction d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D} = I$ ou sur $\mathcal{D} = I \setminus \{a\}$.

Définition

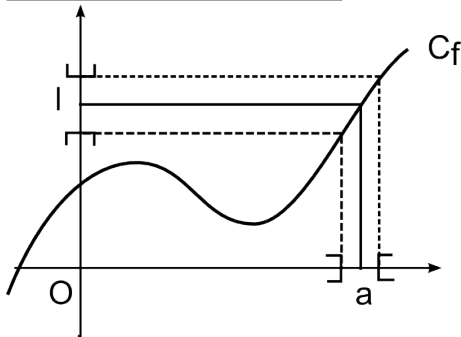
Soit $l \in \mathbb{R}$.

On dit que f admet l pour limite en a si tout intervalle ouvert contenant l contient les réels $f(x)$ pour tous les x de $\mathcal{D}$ suffisamment proches de a .

On note :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$$

Interprétation graphique



$f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut de l , pourvu que x s'approche suffisamment près de a .

Proposition

Si f est définie en a et si f admet une limite finie l en a , alors

$$l = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Remarque

C'est le cas, en tout point de leur ensemble de définition, des fonctions polynômes, rationnelles, de la fonction racine carrée et des composées de ces fonctions.

Exemple

- $\lim_{x \rightarrow -1} x^3 - 3x^2 + 5x + 4 = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 5(-1) + 4 = -5$
- $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^2 + 3} = \sqrt{19}$

Proposition

Si f admet une limite finie en a , alors celle-ci est unique.

1.1.2 Limite à gauche, limite à droite

Lors de l'étude de la limite d'une fonction en a , il arrive parfois que l'on soit amené à définir des limites d'un seul côté de a .

Cela signifie que l'on étudie les limites de la restriction de f à $]b, a[$ et de la restriction de f à $]a, c[$. On introduit les notions de limite à droite en a et de limite à gauche en a .

- On dit que f admet pour limite l à gauche en a si $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut de l , pourvu que x s'approche suffisamment près de a par valeurs strictement inférieures. On note :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = l \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$$

- On dit que f admet pour limite l à droite en a si $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut de l , pourvu que x s'approche suffisamment près de a par valeurs strictement supérieures. On note :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = l \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$$

Proposition

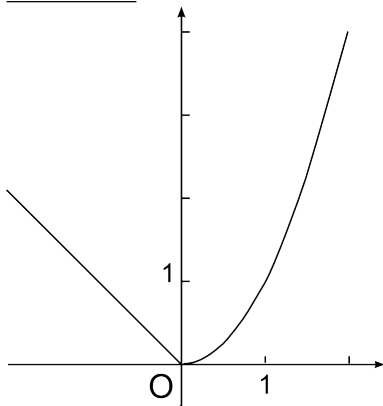
Soit f une fonction définie au voisinage de a .

f admet une limite finie en a ssi f admet une limite finie à gauche et à droite en a et que ces deux limites sont égales.

Remarques :

L'étude de la limite de f en un point à l'aide des limites à gauche et à droite est pertinente dès que $f(x)$ s'exprime différemment à droite et à gauche du point en question.

Exemples

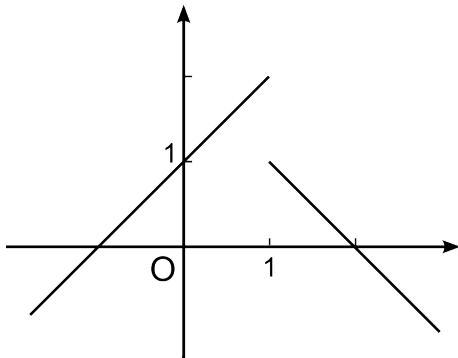


Soit f la fonction définie par
$$\begin{cases} f(x) = -x & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2) = 0$$

f admet une limite finie à gauche et à droite de 0, ces deux limites sont égales donc f admet une limite en 0 et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$



Soit f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = x + 1 & \text{si } x < 1 \\ f(x) = -x + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 2$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x + 2) = 1$$

f admet une limite finie à gauche et à droite de 1, ces deux limites ne sont pas égales donc f n'admet pas de limite en 1.

1.1.3 Limite infinie en un point

Soit a un réel et f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]b, a[$ ou $]a, c[$.

Définition

- On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a , si $f(x)$ prend des valeurs aussi grandes que l'on veut, dès que x est suffisamment proche de a .

On note :

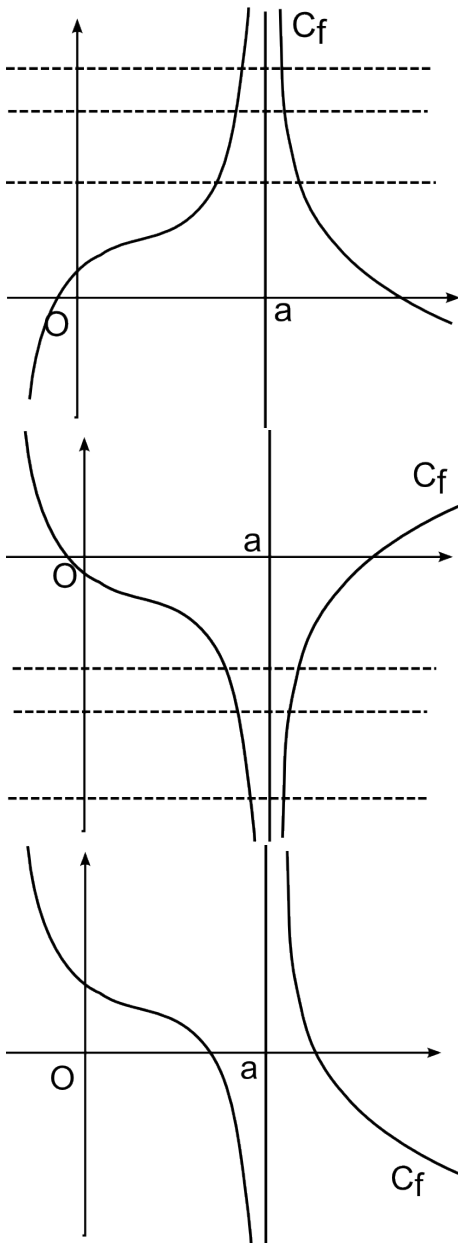
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$$

- On définit de la même façon f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a en appliquant la définition précédente à $-f$.

On note

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$$

Interprétation graphique



Lorsque x prend des valeurs de plus en plus proche de a , la courbe $\mathcal{C}_f$ finit par se situer au dessus de n'importe quelle droite horizontale.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

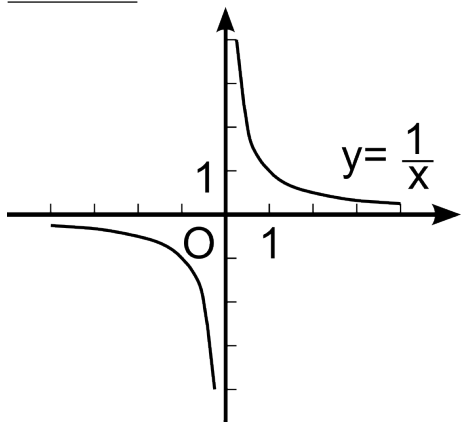
Lorsque x prend des valeurs de plus en plus proche de a , la courbe $\mathcal{C}_f$ finit par se situer en dessous de n'importe quelle droite horizontale.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

Dans ce cas :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty$$

Exemples

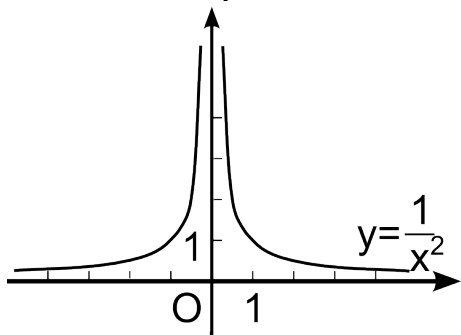


Pour la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$
lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives $f(x)$ tend vers $+\infty$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement négatives $f(x)$ tend vers $-\infty$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$$



Pour la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$
lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives ou négatives $f(x)$ tend vers $+\infty$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Proposition

1. Les fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{x^2}; \quad x \mapsto \frac{1}{x^4}; \quad x \mapsto \frac{1}{x^{2n}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

ont pour limite $+\infty$ en 0.

2. Les fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{x}; \quad x \mapsto \frac{1}{x^3}; \quad x \mapsto \frac{1}{x^{2n+1}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

ont pour limite $+\infty$ à droite en 0 et pour limite $-\infty$ à gauche en 0.

3. La fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$$

a pour limite $+\infty$ à droite en 0.

1.2 Limite d'une fonction en $+\infty$ et en $-\infty$

1.2.1 Limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$

On considère des fonctions définies sur un intervalle de la forme $[c ; +\infty[$ ou $] -\infty ; c]$.

Définition

Soit l un réel.

On dit que f admet l pour limite en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient les réels $f(x)$ pour tous les x suffisamment grands.

On note :

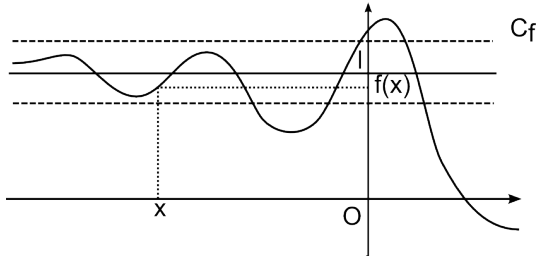
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$$

On dit que f admet l pour limite en $-\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient les réels $f(x)$ pour tous les x suffisamment petits.

On note :

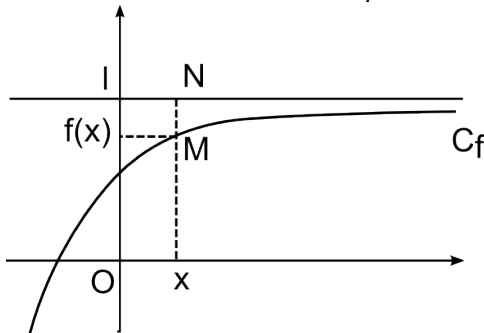
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} l$$

Interprétation graphique



$f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut de l , pourvu que x soit suffisamment petit.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$$



Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, la distance MN tend vers 0. La courbe C_f se rapproche sans cesse de la droite d'équation $y = l$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

Proposition

1. Les fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{x}; \quad x \mapsto \frac{1}{x^2}; \quad x \mapsto \frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

ont pour limite 0 en $+\infty$ et en $-\infty$

2. La fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$$

a pour limite 0 en $+\infty$.

1.2.2 Limite infinie en $+\infty$ et en $-\infty$

On considère des fonctions définies sur un intervalle de la forme $[c ; +\infty[$ ou $] -\infty ; c]$.

Définition

- On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si $f(x)$ prend des valeurs aussi grandes que l'on veut dès que x est suffisamment grand.

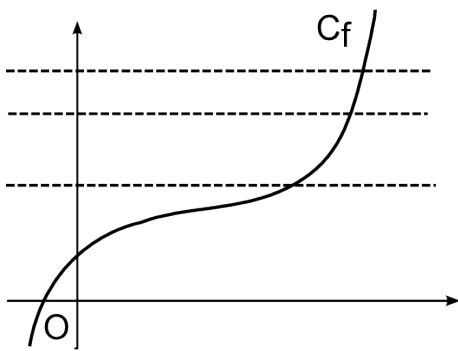
On note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

- On définit de même

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

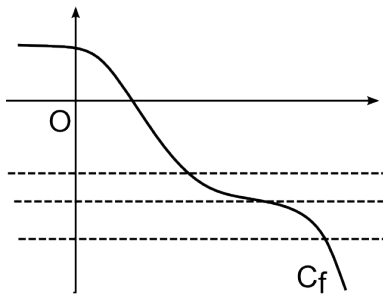
Interprétation graphique



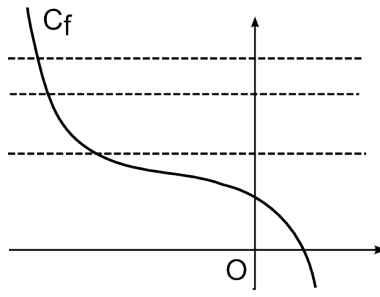
Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, la courbe C_f finit par se situer au dessus de n'importe quelle droite horizontale.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

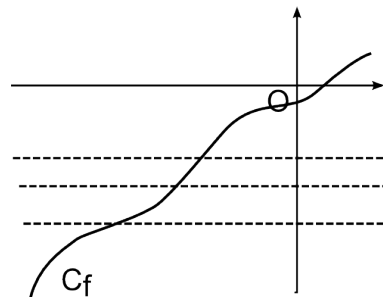
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$



Proposition

-

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

- Plus généralement pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

1.3 Opérations algébriques sur les limites.

x_0 désigne un élément de $\mathbb{R}$ ou $+\infty$ ou $-\infty$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant x_0 .

f et g deux fonctions définies sur I ou sur $I \setminus \{x_0\}$

FI signifie Forme Indéterminée.

1.3.1 Produit d'une fonction par un réel

Soit λ un réel.

Le tableau suivant donne le comportement asymptotique de $\lambda.f$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} \lambda f(x)$ avec $\lambda > 0$	λl	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} \lambda f(x)$ avec $\lambda < 0$	λl	$-\infty$	$+\infty$

Exercice 1 :

Déterminer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^2 \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2} \quad c) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -\frac{2}{x} \quad d) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} -\frac{2}{x}$$

1.3.2 Somme de deux fonctions

Le tableau suivant donne le comportement asymptotique de $f + g$.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Exercice 2 :

Déterminer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 + 3x \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} - x \quad c) \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - \frac{2}{x} \quad d) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 3x + 1 - \frac{1}{x} \quad e) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x + 2$$

1.3.3 Produit de deux fonctions

Le tableau suivant donne le comportement asymptotique de $f \times g$.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	$l < 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l > 0$	0	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	l'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \times g(x)$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Exercice 3 :

Déterminer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 + 3x)(-x + 1) \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} (2 + x)\sqrt{x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 1) \frac{1}{x} \quad e) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x + 1) \frac{1}{\sqrt{x}}$$

1.3.4 Quotient de deux fonctions

Supposons que g ne s'annule pas sur I .

Le tableau suivant donne le comportement asymptotique de $\frac{f}{g}$.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	l'	$\pm\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-	0
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Exercice 4 :

Déterminer les limites suivantes :

$$\begin{aligned}
 a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x}{-1 + \frac{1}{x}} \quad & b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2 + x} \quad & c) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{2x + 3}{x - 1} \quad & d) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{2x + 3}{x - 1} \\
 e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 + x - 1}{2x - 5} \quad & f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}
 \end{aligned}$$

1.4 Limite des fonctions polynômiales et rationnelles en $\pm\infty$

Proposition

- La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ et en $-\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
- La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ et en $-\infty$ est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré.

Exemples

$$\begin{aligned}
 1. \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^4 + 5x^2 - x + 1) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^4) = -\infty. \\
 2. \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^4 + 5x^2 - x + 1) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^4) = -\infty. \\
 3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x^4 - 3x^2 + 1}{2x^2 + 2} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x^4}{2x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{2}x^2 \right) = +\infty. \\
 4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 + 3x - 1}{x^3 - 5x} \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Remarque : limite d'une fonction rationnelle

- en $-\infty$ ou en $+\infty$

On prend la limite du quotient des termes de plus haut degré.

- en un réel a

On étudie séparément la limite du numérateur et du dénominateur en a . (Le plus souvent on remplace x par a dans l'expression du numérateur et du dénominateur)

Si la limite du numérateur est un réel non nul et que le dénominateur tend vers 0 on étudie le signe du dénominateur.

Le quotient tend alors vers $+\infty$ ou $-\infty$ en appliquant la règle des signes (on tient compte du signe de la limite du numérateur et du signe du dénominateur)

Si le dénominateur change de signe en s'annulant on distinguera une limite à gauche et une limite à droite.

Exercice 5 :

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 2}$ en $+\infty$, en $-\infty$, à gauche et à droite en 2.
3. $f(x) = \frac{1 - x}{(x - 3)^2}$ en $+\infty$, en $-\infty$ et en 3.
4. $f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right) \left(\frac{x + 1}{2x^2}\right)$ en $+\infty$, en $-\infty$ et en 0.
5. $f(x) = \frac{x + 2}{\sqrt{x} + 1}$ en $+\infty$.
6. $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ en $+\infty$ et en 0.

1.5 Limite d'une fonction composée

Proposition

a, b et l désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\begin{aligned} \text{si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow b} g(x) = l \\ \text{alors } \lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = l \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{f} & f(x) & \xrightarrow{g} & g(y) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a & & b & & l \end{array} \quad = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

Exercice 6 :

Etudier les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x + 1}{(x - 1)^2}}$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x + 1}{(x - 1)^2}}$

2 Interprétation graphique des limites : étude des branches infinies.

f désigne une fonction numérique et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

2.1 Asymptote verticale

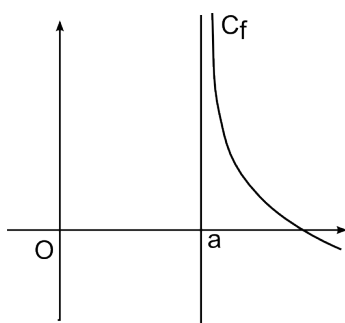
Supposons f définie sur un intervalle de la forme $]a; \dots[$ ou $]\dots; a[$.

Définition

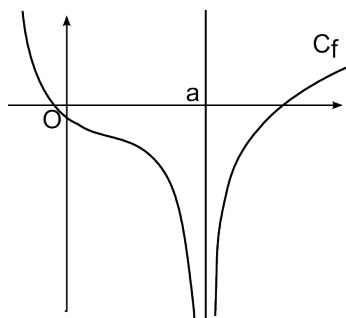
Si f admet une limite infinie lorsque x tend vers a par valeurs supérieures ou inférieures, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = a$.

- La fonction f n'est pas définie en a .
- La courbe $\mathcal{C}_f$ se rapproche de la droite verticale d'équation $x = a$.

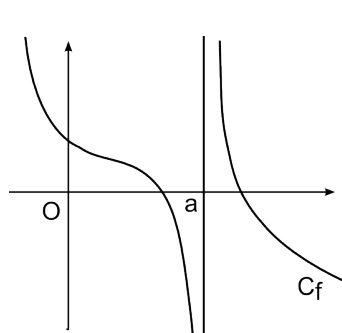
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$



2.2 Asymptote horizontale

Supposons f définie sur un intervalle de la forme $[c; +\infty[$ ou $] -\infty; c]$.

Définition

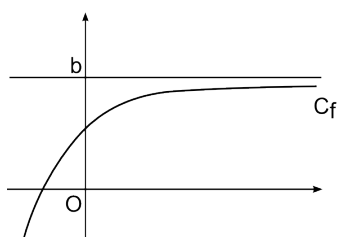
Soit b un réel .

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$)

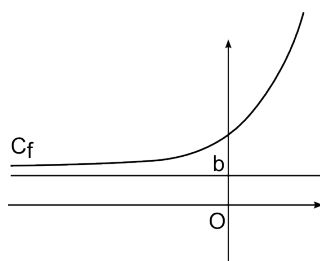
on dit que $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) une asymptote horizontale d'équation $y = b$.

- La courbe $\mathcal{C}_f$ se rapproche de la droite horizontale d'équation $y = b$

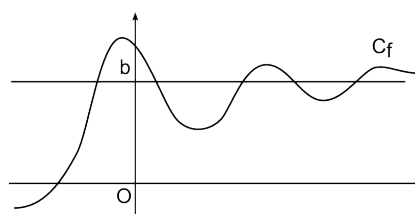
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$$



2.3 Asymptote oblique

Supposons f définie sur un intervalle de la forme $[c ; +\infty[$ ou $] -\infty; c]$.

Définition

Soit a un réel non nul et b un réel.

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = b$

on dit que $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.

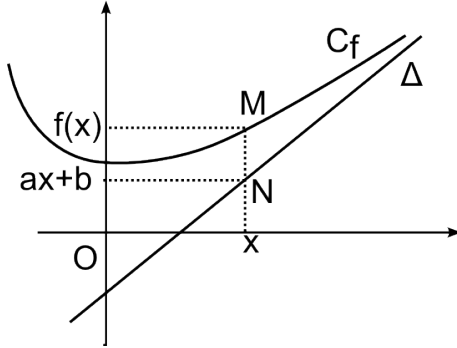
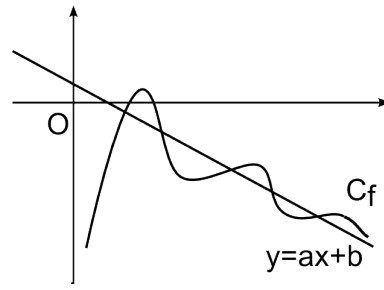
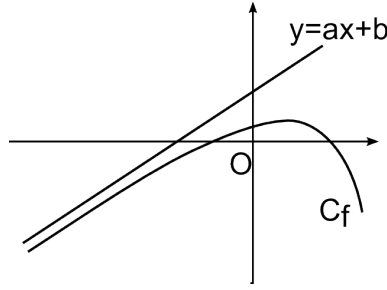
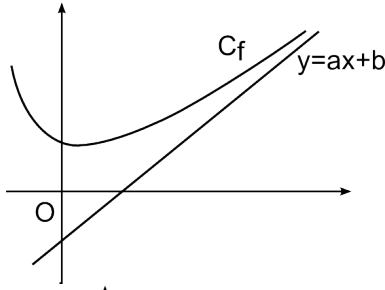
- En d'autres termes la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

- Les résultats sont analogues en $-\infty$.

Remarques

La courbe $\mathcal{C}_f$ se rapproche de la droite Δ d'équation $y = ax + b$



Si M et N sont les points respectifs de $\mathcal{C}_f$ et Δ d'abscisse x .

$$MN = y_M - y_N = f(x) - (ax + b)$$

$$\text{donc } MN \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

La distance entre la courbe et la droite tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$

Exercice 7 :

Soit $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-4}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

1. Déterminer la limite de f en -2 et en 2 .

En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet deux asymptotes verticales dont on donnera l'équation.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$ et en déduire une asymptote de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 8 :

Soit $f(x) = \frac{2x^2+2x-1}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet en $-\infty$ et en $+\infty$ une asymptote horizontale que l'on précisera.

Exercice 9 :

Soit $f(x) = \frac{x^3-x^2+9x-1}{x^2+2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 10 :

On considère la fonction f définie sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2+x+6}{2x+2}$.

1. Déterminer des réels a , b et c tels que pour tout $x \geq -1$

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{2x+2}$$

2. En déduire l'existence d'une asymptote oblique $\mathcal{D}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ et préciser la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{D}$.

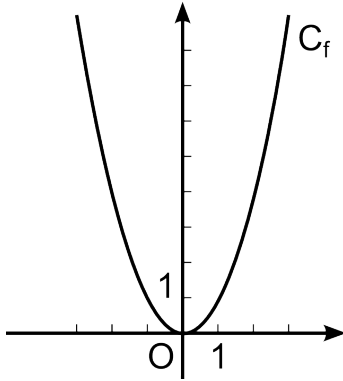
Remarque :

Si $f(x) = ax + b + g(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

3 Continuité

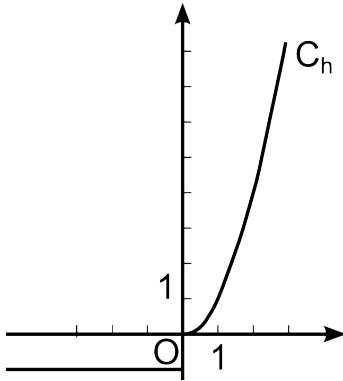
3.1 Continuité d'une fonction en un point

Approche graphique



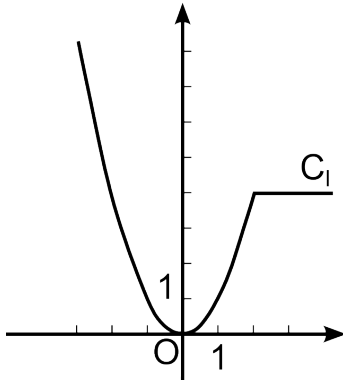
$$f(x) = x^2$$

La courbe de f est "en un seul morceau"
On peut la tracer sans lever le crayon.



$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La courbe de h est composée de deux morceaux.
Il y a un saut en $x = 0$.
On ne peut tracer C_h sans lever le crayon.



$$l(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

La courbe de l se trace d'un seul trait continu, sans lever le crayon

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I .
On dit que f est continue en a si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Remarques

- Dire que f est continue en a signifie que f est définie en a et que f admet une limite finie en a égale à $f(a)$.
- Si la fonction f est définie différemment à gauche et à droite de a , pour montrer que f est continue en a , il faut montrer que f admet une limite finie à gauche et à droite de a et que ces limites sont égales à $f(a)$ ie

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

Exemple

Dans les exemples précédents :

- Les fonctions f et l sont continues en tout point de $\mathbb{R}$.
- La fonction h est discontinue en 0 et continue en tout point différent de 0.

Exercice 11 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -2x + 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
2. Etudier la continuité de f en 0 et en 1.

Proposition

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et a un point de I .

Si f et g sont continues en a alors :

- $f + g$, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$), $f \times g$ sont continues en a .
- si $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est continue en a .

Proposition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a et g une fonction définie sur un intervalle J contenant $f(a)$.

Si f est continue en a et si g est continue en $f(a)$ alors

$$g \circ f \text{ est continue en } a$$

3.2 Continuité d'une fonction sur un intervalle

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On dit que f est continue sur I si et seulement si f est continue en tout point de I .

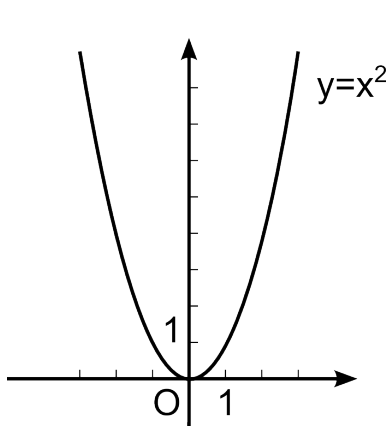
Remarques

Dire que f est continue sur I signifie graphiquement que l'on peut tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle I sans avoir à lever le crayon.

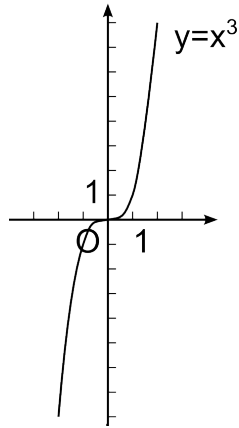
Proposition

- Les fonctions de références (fonction affine, carré, inverse, racine) sont continues sur leur ensemble de définition.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$

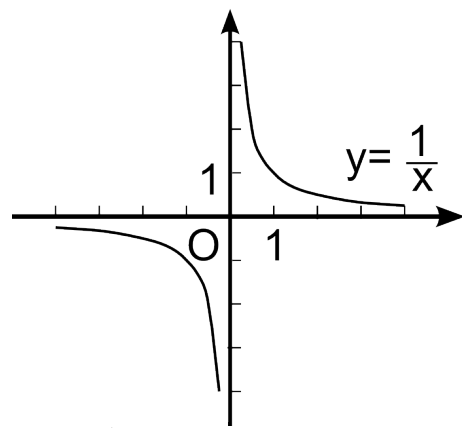
Exemples



$x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$



$x \mapsto x^3$ est continue sur $\mathbb{R}$



$x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $] -\infty; 0[$
et sur $]0; +\infty[$

Proposition

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I .

Si f et g sont continues sur I alors :

- $f + g$, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$), $f \times g$ sont continues sur I .
- si g ne s'annule pas sur I , $\frac{f}{g}$ est continue sur I .

Le résultat précédent et la continuité des fonctions usuelles donnent :

Proposition

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.

Proposition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J vérifiant

$$\forall x \in I, \quad f(x) \in J$$

Si f est continue sur I et si g est continue sur J alors

$$g \circ f \text{ est continue sur } I$$

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

La fonction polynôme $x \mapsto x^2 + x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Son discriminant vaut $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + x + 1 > 0$$

La fonction racine $X \mapsto \sqrt{X}$ est continue sur $[0; +\infty[$
donc par composition, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 :

Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ est continue sur $] -1; 1[$.

Fonctions numériques Limites et continuité exercices

1) Déterminer dans chacun des cas suivants, la limite de la fonction en $+\infty$ et en $-\infty$:

$$(a) f(x) = 3x^2 \left(5 - \frac{1}{x}\right) \quad (b) f(x) = (5 - 2x)(3x + 2) \quad (c) f(x) = \frac{x^3 - 2x + 2}{2x^2 + 1}$$

$$(d) f(x) = \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) \left(\frac{x+2}{x^2}\right) \quad (e) f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x^3 + 2}$$

2) Déterminer dans chacun des cas suivants, la limite de la fonction en 0. On distinguera si nécessaire, les limites à gauche et limites à droite de 0.

$$(a) f(x) = 5 - \frac{2}{x} \quad (b) f(x) = \frac{2x^2 + 1}{3x} \quad (c) f(x) = 2x + 1 - \frac{3}{2x^2}$$

3)

- Déterminer la limite de la fonction $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 4}{x - 2}$ à gauche et à droite en 2.
 - (a) Déterminer le signe de $x^2 + 2x - 3$ en fonction de x .
(b) En déduire la limite de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1 + 2x}{x^2 + 2x - 3}$ en -3 et en 1.
-

4) Déterminer la limite des fonctions suivantes aux points considérés :

- $x \mapsto \sqrt{3x^3 + 2x^2 - 7x + 1}$ en $+\infty$.
 - $x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{x^2}}$ à droite en 0 et en $+\infty$
-

5) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \frac{-x^2 + 3x}{x - 1}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

- Déterminer la limite de f à gauche et à droite en 1.
 - En déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale dont on donnera l'équation.
 - Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
-

6)

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{-4x^2 - 1}$
 - Déterminer la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de $f(x)$.
 - Quelle interprétation graphique peut-t-on en déduire.
- Soit g la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par $g(x) = \frac{2x^2 - x - 2}{x + 1}$
 - Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$
 - Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{D}$.

7) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + x + 1}$

1. Montrer qu'il existe quatre réels a , b , c et d tels que pour tout x :

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + x + 1}$$

2. En déduire que la courbe représentative de f admet en $+\infty$ et en $-\infty$, une asymptote oblique Δ et donner la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ .

8) Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x}{x^2 - 1}$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. En déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote verticale dont on déterminera l'équation.

3. On pose $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$

(a) Calculer a et b .

(b) Montrer qu'il existe un réel c tel que :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad f(x) - ax - b = \frac{c}{x^2 - 1}$$

et donner la valeur de c .

(c) Prouver que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote $(\mathcal{D})$ dont on donnera une équation ainsi que la position de $(\mathcal{D})$ par rapport à $\mathcal{C}_f$.

9) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

1. Justifier que la fonction f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer sa limite en $-\infty$.

Peut-on déterminer directement sa limite en $+\infty$?

3. Montrer que pour tout $x > 0$ on a :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}.$$

4. En déduire la limite de f en $+\infty$.

10)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -x & \text{si } x < 0 \\ f(x) = 2x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ f(x) = \frac{10}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue au point $x = 2$.

2. f est-elle continue au point $x = 0$?

3. Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$;