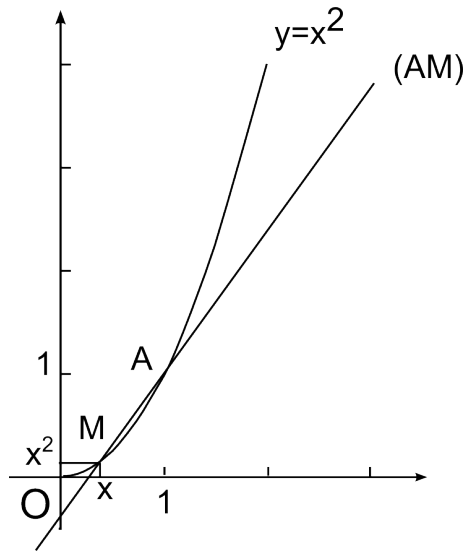


Fonctions : dérivation et convexité

1 Dérivée en un point

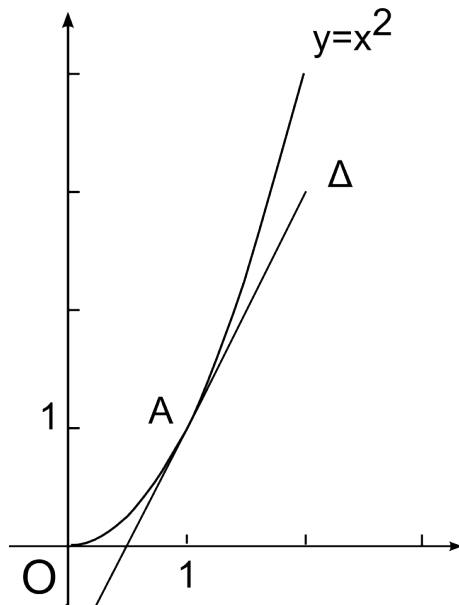
1.1 Nombre dérivé en un point

- Soit $\mathcal{P}$ la parabole représentant la fonction $f : x \mapsto x^2$.
Soit A le point de $\mathcal{P}$ de coordonnées $(1; 1)$.



Soit M le point de $\mathcal{P}$ d'abscisse x .
 M a pour coordonnées (x, x^2) .
La droite (AM) a donc pour coefficient directeur

$$\begin{aligned} t(x) &= \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} \\ &= \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1 \end{aligned}$$



Lorsque M se rapproche aussi près que l'on veut de A , l'abscisse x de M tend vers l'abscisse de A qui est 1 donc x tend vers 1.

La droite (AM) tend vers une position limite Δ qui est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A .

Le coefficient directeur $t(x) = x + 1$ de (AM) tend vers 2 lorsque x tend vers 1.

2 est appelé nombre dérivé de f au point 1.

Définition

- Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et x deux réels de I (avec $x \neq a$). Notons $t(x)$ le taux d'accroissement de f en a :

$$t(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- La fonction f est dérivable en a lorsque le taux d'accroissement de f en a admet une limite finie l lorsque x tend vers a .
- l est appelé nombre dérivé de f en a . On le note $f'(a)$.
- On écrit alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

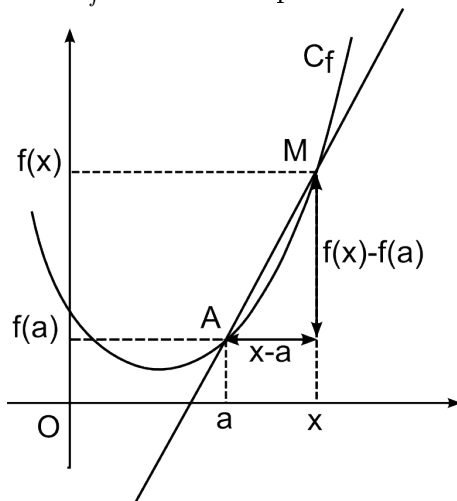
Remarque :

La limite en a du taux d'accroissement est une forme indéterminée " $\frac{0}{0}$ ".

Dire que f est dérivable en a signifie que cette limite est finie lorsque x tend vers a .

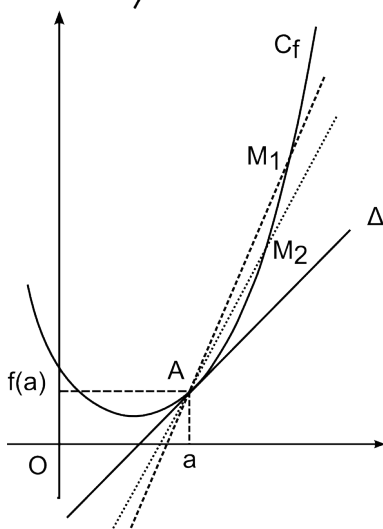
Interprétation graphique :

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f et $a \in \mathcal{D}_f$.



Soit $x \neq a$ tel que $x \in \mathcal{D}_f$

Le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ de f entre a et x est le coefficient directeur de la droite (AM) où $A(a; f(a))$ et $M(x, f(x))$.



Si f est dérivable en a , le coefficient $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet pour limite $f'(a)$ lorsque x tend vers a .

Graphiquement, le point M se rapproche de A en restant sur la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite (AM) tend à occuper une position limite Δ .

La droite Δ est la droite passant par le point de la courbe $A(a, f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$. La droite Δ est appelée la tangente à $\mathcal{C}$ au point A .

Exemples :

1. Soit $f(x) = x^2$.
On a montré que

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = x + 1 \xrightarrow{x \rightarrow 1} 2$$

donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.

2. Soit $f(x) = x^3 + x^2 - 2$ et $a = 1$.
 $f(1) = 0$ donc f est factorisable par $x - 1$.

$f(x) = (x - 1)(x^2 + 2x + 2)$, d'où pour tout $x \neq 1$

$$\frac{f(x) - f(1)}{(x - 1)} = \frac{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)}{x - 1} = x^2 + 2x + 2 \xrightarrow{x \rightarrow 1} 5$$

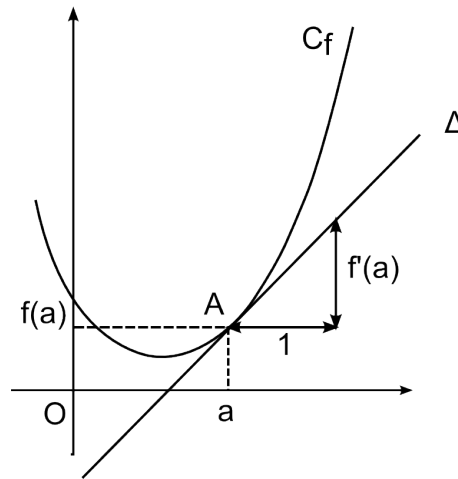
donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 5$.

3. Soit $f(x) = \sqrt{x}$. $f(0) = 0$ et pour tout $x > 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{(x - 0)} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$$

donc f n'est pas dérivable en 0. Le taux d'accroissement de f en 0 n'a pas de limite finie.

1.2 Tangente à une courbe



Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en un point a de I .
Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormal.
La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(a, f(a))$ est la droite Δ passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Proposition

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(a; f(a))$ a pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exemples :

1. Soit $f(x) = x^2$.
 f est dérivable en 1. $f'(1) = 2$ et $f(1) = 1$.
La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1.$$

2. Soit $f(x) = x^3 + x^2 - 2$.
 f est dérivable en 1. $f'(1) = 5$ et $f(1) = 0$.
La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation

$$y = 5(x - 1) = 5x - 5$$

1.3 Approximation affine au voisinage d'un point

- Si f est dérivable en a , la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente Δ au point $A(a; f(a))$.
Parmi les droites passant par A , la tangente Δ est celle qui approche le mieux la courbe $\mathcal{C}_f$ autour du point A .
- Comme Δ est la représentation graphique de la fonction affine $x \mapsto f'(a)(x - a) + f(a)$ on dit que la fonction

$$x \mapsto f'(a)(x - a) + f(a)$$

est la meilleure approximation affine de f au voisinage de a .

- Au voisinage de a , les quantités numériques $f'(a)(x - a) + f(a)$ et $f(x)$ sont proches.
On écrit qu'au voisinage de a

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).$$

Exemple :

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x^2 - 2$.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $y = 5x - 5$.

$5x - 5$ est donc l'approximation affine de f au voisinage de 1.

On a donc

$$f(1,0007) \approx 5 \times 1,0007 - 5 = 5,0035 - 5 = 0,0035$$

1.4 Nombre dérivé à gauche et à droite

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a .

- On dit que f est dérivable à droite en a si le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie à droite en a (quand x tend vers a , $x > a$).
On la note $f'_d(a)$.
- On dit que f est dérivable à gauche en a si le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie à gauche en a (quand x tend vers a , $x < a$).
On la note $f'_g(a)$.

Proposition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a ,
 f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en a et si $f'_g(a) = f'_d(a)$.
On a alors

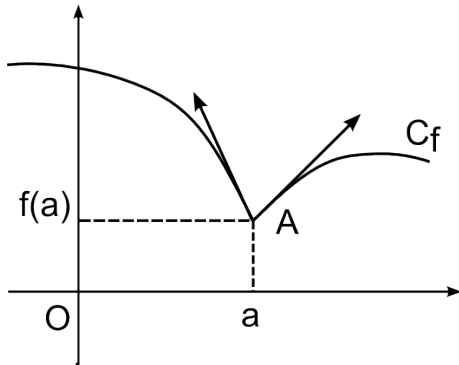
$$f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$$

Démonstration :

La fonction taux d'accroissement $t(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, qui n'est pas définie en a , possède une limite en a , si et seulement si elle possède des limites à gauche et à droite en a qui sont égales.

Interprétation géométrique : demi-tangente

Soit $A(a; f(a))$ un point de $\mathcal{C}_f$.



- On appelle demi-tangente à droite de A , la demi-droite d'origine A et de coefficient directeur $f'_d(a)$ située dans le demi-plan à droite de A (pour $x \geq a$). Elle a pour équation

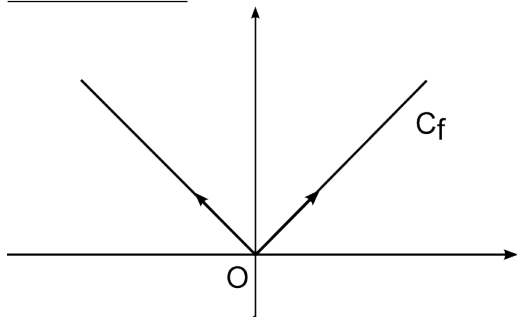
$$y = f'_d(a)(x - a) + f(a) \text{ avec } x \geq a$$

- On définit de la même façon la demi-tangente à gauche en A qui a pour équation

$$y = f'_g(a)(x - a) + f(a) \text{ avec } x \leq a$$

- Le critère de dérivabilité de f en a s'interprète alors :
 f est dérivable en a si et seulement si les deux demi-tangentes existent et si leur union est une droite.
- Si $f'_g(a) \neq f'_d(a)$ alors les deux demi-tangentes existent, leur réunion n'est pas une droite, on obtient un point anguleux.

Exercice 1 :

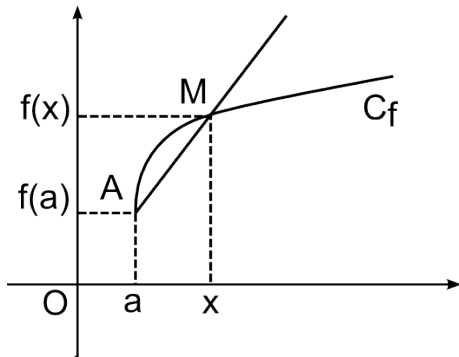


Considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable à gauche et à droite en 0 mais que f n'est pas dérivable en 0. La courbe représentative de la fonction f admet deux demi-tangentes en $(0, 0)$.
 $(0, 0)$ est le point anguleux.

1.5 Tangente verticale

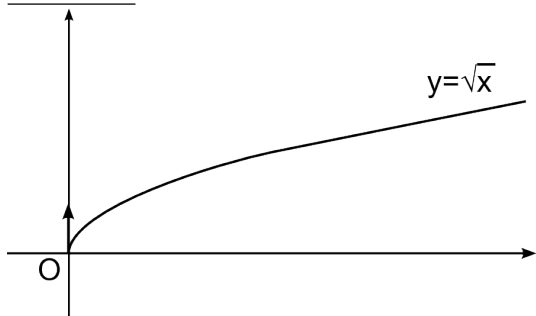


Considérons $t(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ la pente de la droite (AM) .

Si $t(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$ alors la droite (AM) tend vers une position limite lorsque M se rapproche de A qui est la droite *verticale* passant par A (parallèle à l'axe des ordonnées).

- Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une tangente verticale au point $A(a; f(a))$. La fonction f n'est alors pas dérivable en a .

Exemple



$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ donc la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ admet une tangente verticale en $(0, 0)$.

1.6 Lien avec la continuité

Proposition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.
 Si f est dérivable en a alors f est continue en a .
 La réciproque est fausse.

Contre-exemple à la réciproque :

1. $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0 non dérivable en 0.
2. La fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 non dérivable en 0.

2 Fonction dérivée

2.1 Définitions

Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ et I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}$.
On dit que la fonction f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout point a de I .

Définition

Soit f une fonction dérivable sur I .
On appelle fonction dérivée de la fonction f , la fonction notée f' , définie sur I par

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

Exemples :

1. Si $f(x) = c$ (constante).

Soit $a \in \mathbb{R}$, pour tout $x \neq a$,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{c - c}{x - a} = 0$$

donc f est dérivable en a et $f'(a) = 0$. f' est l'application nulle.

2. Si $f(x) = x$.

Soit $a \in \mathbb{R}$, pour tout $x \neq a$,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x - a}{x - a} = 1$$

donc f est dérivable en a et $f'(a) = 1$.

3. Si $f(x) = \frac{1}{x}$.

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pour tout $x \neq a$,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = \frac{\frac{a - x}{ax}}{x - a} = -\frac{1}{ax} \xrightarrow{x \rightarrow a} -\frac{1}{a^2}$$

donc f est dérivable en a et $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

La fonction dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

Remarques :

1. Une fonction est dérivable sur un intervalle strictement inclus ou égal à son ensemble de définition.
2. Si f est dérivable sur I , en tout point $A(a, f(a))$ la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente dont le coefficient directeur est $f'(a)$.
3. La fonction dérivée de la fonction f donne les valeurs des coefficients directeurs des tangentes à $\mathcal{C}_f$.
En particulier la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $A(a, f(a))$ est horizontale ssi $f'(a) = 0$

2.2 Dérivée des fonctions usuelles

$f(x) = \dots$	$f'(x) = \dots$	f dérivable sur
c (constante)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$ax + b$	a	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x^n, (n \in \mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n} (n \in \mathbb{N}^*)$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

Exercice 2 :

Donner la dérivée des fonctions suivantes

$$f(x) = x^7 \quad g(x) = \frac{1}{x^5}$$

2.3 Opérations algébriques sur les fonctions dérivées

Proposition

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle I . Alors la fonction

1. somme $u + v$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$
2. produit par un scalaire (ku) est dérivable sur I et $(ku)' = ku'$
3. produit (uv) est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$
4. inverse $\frac{1}{v}$ est dérivable pour tout $x \in I$ tel que $v(x) \neq 0$ et $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
5. quotient $\left(\frac{u}{v}\right)$ est dérivable pour tout $x \in I$ tel que $v(x) \neq 0$ et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

On en déduit en particulier le résultat suivant :

Proposition

1. Une fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Une fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.

Exercice 3 :

A l'aide des formules de dérivation, déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

- $f(x) = \frac{3}{4}x^5 + \frac{7}{2}x^4 - 8x^3 - x + 2$
- $g(x) = \frac{1}{x^3 + 2x + 1}$
- $h(x) = (1 - 4x)\sqrt{x}$
- $i(x) = \frac{5 - 2x}{3x + 4}$
- $j(x) = x^2 + \sqrt{x}$
- $k(x) = (3x + 1)(x^2 + 2x)$
- $l(x) = -\frac{3}{3x + 2}$
- $m(x) = \frac{2x^2 - x + 3}{3x - 1}$.

2.4 Dérivée d'une fonction composée

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle J telle que

$$\forall x \in I, \quad u(x) \in J$$

alors $f = v \circ u$ est dérivable sur I et

$$f'(x) = u'(x) \times v'(u(x)) = u'(x) \times v' \circ u(x).$$

On en déduit les cas particuliers suivants :

Proposition

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

1. On suppose que

$$\forall x \in I, \quad u(x) > 0$$

La fonction $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et l'on a

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

2. La fonction $f(x) = u^n(x)$, ($n \in \mathbb{N}^*$) est dérivable sur I et

$$f'(x) = nu'(x)(u(x))^{n-1}$$

3. On suppose que

$$\forall x \in I, \quad u(x) \neq 0$$

La fonction $f(x) = \frac{1}{u(x)^n}$, ($n \in \mathbb{N}^*$) est dérivable sur I et l'on a

$$f'(x) = -\frac{nu'(x)}{u(x)^{n+1}}$$

Démonstration

on applique la proposition précédente à $v(x) = \sqrt{x}$, $v(x) = x^n$ puis $v(x) = \frac{1}{x^n}$.

Exercice 4 :

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 5 :

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $g(x) = (x^2 + x - 1)^3$ sur $\mathbb{R}$
2. $h(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ sur $]1; +\infty[$
3. $i(x) = \frac{1}{(x^3 + 2x^2 - x - 2)^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$

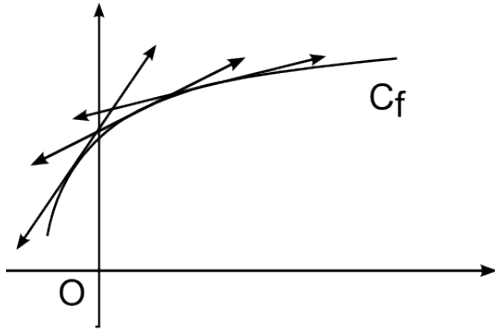
Tableau récapitulatif

fonction f	dérivée f'	commentaires
$u + v$	$u' + v'$	
au	au'	a constante
uv	$u'v + uv'$	
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	si $v(x) \neq 0$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	si $v(x) \neq 0$
$v \circ u$	$u' \times v' \circ u$	
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	si $u(x) > 0$
u^n	$nu'u^{n-1}$	$n \in \mathbb{Z}$ avec $u(x) \neq 0$ lorsque $n < 0$
$\frac{1}{u^n}$	$-\frac{nu'}{u^{n+1}}$	si $u(x) \neq 0$

3 Variation d'une fonction

3.1 Variation d'une fonction et signe de la dérivée

On cherche à mettre en évidence le fait que le signe du coefficient directeur de la tangente donc du nombre dérivé permet de savoir si la fonction est croissante ou décroissante.



Si f est croissante sur I , en chaque point de la courbe le coefficient directeur de la tangente est positif.

Pour tout réel a de I , $f'(a) \geq 0$.

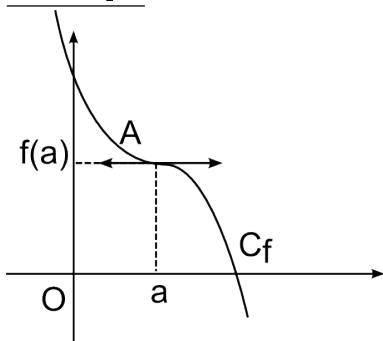
Réciproquement si toutes les tangentes ont un coefficient directeur positif, autrement dit si les nombres dérivés sont positifs, la courbe ne peut que *monter*.

Proposition : Dérivée d'une fonction monotone

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si f est croissante sur I alors $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$
- Si f est décroissante sur I alors $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$
- Si f est constante sur I alors $\forall x \in I, f'(x) = 0$

Remarque



Même si f est strictement monotone sur I , la fonction f' peut s'annuler sur I comme le montre le graphique ci contre.

La tangente au point A est horizontale donc son coefficient directeur est nul et $f'(a) = 0$.

Proposition : Sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I contenu dans son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.

- Si la dérivée f' est nulle sur I , alors f est constante sur I .
- Si f' est strictement positive sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule alors f est strictement croissante sur I .
- Si f' est strictement négative sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule alors f est strictement décroissante sur I .

Méthode :

Pour déterminer le sens de variation d'une fonction ainsi que son tableau de variation :

- On calcule sa fonction dérivée
- On détermine le signe de la dérivée
- On applique le théorème précédent en résumant les résultats dans un tableau appelé tableau de variation.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$$

$x^2 - x - 2$ est un polynôme de degré 2.

Son discriminant vaut $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$.

$\Delta > 0$ donc f' admet deux racines $x_1 = \frac{1-3}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$.

Un polynôme de degré 2 est du signe du coefficient de x^2 sauf entre les racines donc on en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$	-19	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 6 :

Etudier les variations sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes et donner leur tableau de variation :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x^2 + 4}.$$

On précisera les limites des fonctions en $-\infty$ et en $+\infty$.

Exercice 7 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2+2}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- (a) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$.
(b) En déduire une asymptote de $\mathcal{C}$
- (a) Déterminer la fonction f' sur $\mathbb{R}$ et étudier son signe.
(b) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
- Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$. En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .
- On note I , J et K les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives -1 , 0 et 1 .
Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ aux points I , J et K .

5. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ en faisant figurer les tangentes de la question précédente.

On prendra comme échelle 2cm pour une unité sur l'axe des abscisses et 4 cm pour une unité sur l'axe des ordonnées.

Exercice 8 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 8}{x + 2}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Déterminer les limites de f à gauche et à droite en -2.
(b) En déduire une asymptote de $\mathcal{C}$
2. (a) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$.
(b) Montrer que la droite d'équation $y = x + 3$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
(c) Préciser la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à son asymptote oblique.
3. (a) Déterminer la fonction f' sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ et étudier son signe.
(b) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
(c) Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

4. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

On prendra $x_1 \simeq -3.41$; $x_2 \simeq -0.58$; $f(x_1) \simeq -1.82$; $f(x_2) \simeq 3.82$; où $x_1 = -2 - \sqrt{2}$ et $x_2 = -2 + \sqrt{2}$.

Application à la résolution d'inéquations

Dans certains cas, l'étude des variations d'une fonction permet de déterminer son signe et de résoudre des inéquations.

Exemple :

Montrons que

$$\forall x \geq 0, \quad 2x^3 \geq 9x^2 - 12x$$

$$\text{on a } 2x^3 \geq 9x^2 - 12x \Leftrightarrow 2x^3 - 9x^2 + 12x \geq 0$$

Posons alors $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ sur $[0; +\infty[$.

f est dérivable et

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x - 1)(x - 2)$$

On en déduit le tableau de variation de f :

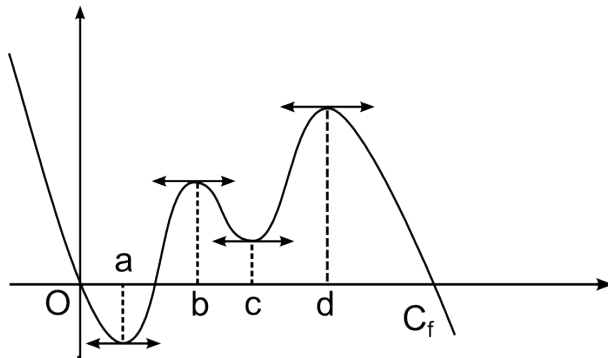
x	0	1	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f admet 0 comme minimum sur $[0; +\infty[$ donc

$$\forall x \geq 0, \quad 2x^3 - 9x^2 + 12x \geq 0$$

$$\text{donc } \forall x \geq 0, \quad 2x^3 \geq 9x^2 - 12x$$

3.2 Extremum local d'une fonction



Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.

- On dit que f admet un maximum (respectivement minimum) local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I tel que :

$$\forall x \in J, \quad f(x) \leq f(x_0)$$

$$(\text{respectivement } \forall x \in J, \quad f(x) \geq f(x_0))$$

- On appelle extremum local en x_0 un maximum ou un minimum local en x_0 .
- Sur le graphique précédent f admet un minimum local en a et en c et un maximum local en b et en d .

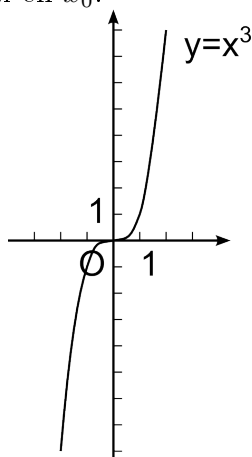
Proposition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$.

- Si f admet un extremum local en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.
- Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet un extremum local en x_0 .

Remarques :

- La condition f' s'annule en x_0 n'est pas suffisante pour en déduire que f admet un extremum local en x_0 .



En effet la fonction $f(x) = x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2$.

f' s'annule en 0 mais f n'a pas d'extremum en 0.

En fait f' reste de signe constant, elle est strictement positive sauf en 0 où elle s'annule.

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- La condition $f'(x_0) = 0$ signifie que C_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse x_0 .
- Pratiquement, les extremums locaux sont aisément repérables sur le tableau de variation : ils correspondent aux changements de sens des flèches : $\nearrow \searrow$ ou $\searrow \nearrow$.

Exercice 9 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$$

Déterminer les extrema locaux de f .

4 Dérivées d'ordre supérieur

4.1 Dérivées successives

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Définition : Dérivée seconde

La fonction f est deux fois dérivable sur I si la fonction f' est dérivable sur I .

Sa dérivée est appelée dérivée seconde de f .

Elle est notée f'' ou $f^{(2)}$.

On a donc

$$f'' = (f')'$$

Exercice 10 :

Déterminer les dérivées secondes des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x - 1 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{1}{x} \text{ sur }]0, +\infty[.$$

Définition : Dérivée d'ordre n

Soit n un entier naturel et f une fonction définie sur un intervalle I .

On pose

$$f^{(0)} = f$$

et on définit par récurrence la fonction dérivée n^{ime} de f sur I , notée $f^{(n)}$, comme la dérivée de $f^{(n-1)}$ si elle existe.

On a donc

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$$

Définition

- On dit que f est n fois dérivable sur I si et seulement si

$$f, f', f^{(2)}, \dots, f^{(n)}$$

existent et sont définies sur I .

- On dit que f est indéfiniment dérivable sur I si

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)} \text{ existe sur } I$$

Exemples :

1. Les fonctions polynômes sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions rationnelles sont indéfiniment dérivables sur leur ensemble de définition.

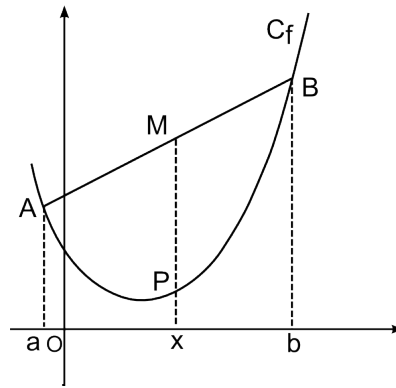
Exercice 11 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x - 1.$$

Déterminer la dérivée n^{ime} de f pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.2 Fonctions convexes deux fois dérivables

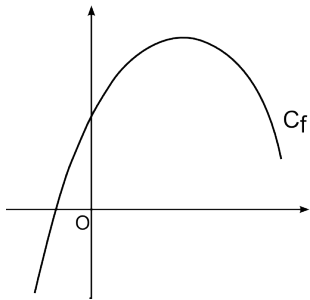


Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan.

La fonction f est dite convexe sur I si pour tous points A et B de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives a et b la courbe de la restriction de f à $[a, b]$ est en dessous de la corde $[A, B]$.

En d'autres termes si pour tout $x \in [a, b]$,

les points P et M d'abscisses x et se trouvant respectivement sur $\mathcal{C}$ et $[A, B]$ vérifient $y_P \leq y_M$.



La fonction f est dite concave si $-f$ est convexe.
Sa courbe est alors située au dessus de ses cordes.

Exemples :

1. Toute fonction affine est à la fois convexe et concave.
2. La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $[0, +\infty[$.
4. La fonction $x \mapsto x^3$ est concave sur $] -\infty, 0]$ et convexe sur $[0, +\infty[$.

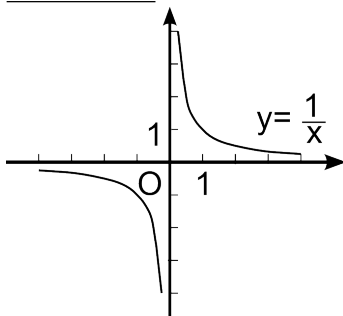
On admet le résultat suivant :

Proposition

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .
 f est convexe sur I si et seulement si

$$\forall x \in I, \quad f''(x) \geq 0$$

Exemples :



Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ et } f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

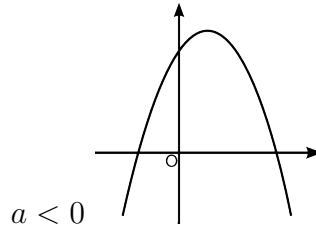
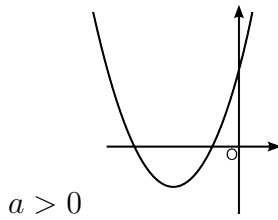
donc $f''(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$ et $f''(x) < 0$ sur $] -\infty; 0[$
 f est convexe sur $]0; +\infty[$ et concave sur $] -\infty; 0[$.

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction trinôme.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2ax + b \text{ et } f''(x) = 2a$$

donc f est convexe si $a > 0$ et f est concave si $a < 0$.



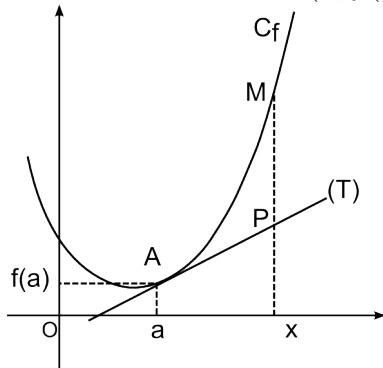
Proposition

Soit f une fonction convexe deux fois dérivable sur I .

- f' est croissante sur I .
- $\mathcal{C}$ est au dessus de ses tangentes.

Démonstration :

- Pour tout $x \in I$, $f''(x) = (f')'(x) \geq 0$ donc f' est croissante sur I .
- Soit $a \in I$ et $A(a, f(a))$ un point de $\mathcal{C}$



Soit T la tangente à $\mathcal{C}$ en A .

T a pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Soit $x \in I$ et M et P les points d'abscisse x se trouvant respectivement sur $\mathcal{C}$ et sur T .

$$y_M = f(x) \text{ et } y_P = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Posons

$$\varphi(x) = y_M - y_P = f(x) - (f'(a)(x - a) + f(a))$$

φ est dérivable et $\varphi'(x) = f'(x) - f'(a)$

f' étant croissante donc

$$\text{si } x \leq a \quad f'(x) \leq f'(a) \text{ et } \varphi'(x) \leq 0$$

$$\text{si } x \geq a \quad f'(x) \geq f'(a) \text{ et } \varphi'(x) \geq 0$$

x	a
$\varphi'(x)$	$- \quad 0 \quad +$
$\varphi(x)$	$\swarrow \quad 0 \quad \searrow$

Donc pour tout $x \in I$, $\varphi(x) \geq 0$,

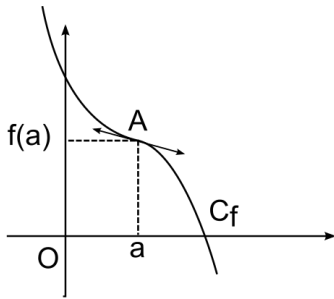
soit $y_M \geq y_P$ et $\mathcal{C}$ est au dessus de la tangente T .

Proposition :

- La courbe d'une fonction convexe est située en dessous de ses cordes et au dessus de ses tangentes.
- La courbe d'une fonction concave est située au dessus de ses cordes et en dessous de ses tangentes.

Définition : Point d'inflexion

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.
Si f est convexe sur l'un des intervalles $]b; a[$ et $]a, c[$, et concave sur l'autre,
le point $A = (a, f(a))$ est appelé point d'inflexion de $\mathcal{C}$.



sur $]b, a[$ f est convexe donc sa courbe est au dessus de sa tangente en a .

sur $]a, c[$ f est concave donc sa courbe est en dessous de sa tangente a .

En un point d'inflexion la courbe "traverse" sa tangente.

Si f est deux fois dérivable, l'étude du signe de f'' permet de déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.

On a donc la propriété suivante :

Proposition

Si f'' s'annule en changeant de signe en x_0
le point $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}$.

Exercice 12 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^4}{2} - x^3 - 6x^2 - 1$$

1. Etudier la convexité de f .
2. Montrer que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f possède deux points d'inflexion A et B et donner leurs coordonnées.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au points A et B .
4. Préciser la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport aux tangentes précédentes et la droite $[A, B]$ sur l'intervalle $[-1, 2]$.

Méthode :

- L'étude du signe de la dérivée f' permet d'obtenir les variations de f :
Si $f' \geq 0$ sur I alors f est croissante sur I
Si $f' \leq 0$ sur I alors f est décroissante sur I
Si f' s'annule et change de signe en a la fonction f admet un extremum local en $A(a, f(a))$.
La tangente à $\mathcal{C}$ en A est horizontale.
- l'étude du signe de la dérivée seconde f'' permet d'obtenir la convexité de f :
Si $f'' \geq 0$ sur I alors f est convexe sur I
Si $f'' \leq 0$ sur I alors f est concave sur I
Si f'' s'annule et change de signe en a la courbe $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion en $A(a, f(a))$.
 $\mathcal{C}$ traverse sa tangente en A .

Dérivation exercices

1) Calculez la fonction dérivée $f'(x)$ des fonctions f suivantes :

- | | |
|---|---|
| 1. $f(x) = -5x^3 + 4x^2 - 9x - 5$ | 1. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ |
| 2. $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^3 - 4x^2 + \sqrt{3}x + 1$ | 2. $f(x) = \frac{2}{5x} - \frac{3x}{4}$ |
| 3. $f(x) = f(x) = (x - 2)\sqrt{x}$ | 3. $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 8}{2x - 5}$ |
| 4. $f(x) = (7x - 2)^5$ | 4. $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 3x + 1)^4}$ |
| 5. $f(x) = \sqrt{x^4 + 1}$ | |
| 6. $f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$ | |

2) Déterminez une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a dans les cas suivants :

1. $f(x) = -x^2 + 2x - 8$ et $a = -2$.
2. $f(x) = \frac{x+3}{1-2x}$ et $a = -1$.
3. $f(x) = \frac{1}{3x}$ et $a = \sqrt{2}$.
4. $f(x) = x^2 + 1 - \frac{1}{x^2 + 1}$ et $a = 0$.

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

1. Donnez l'approximation affine de f en 2.
2. Déduisez-en (sans donner l'erreur commise) des approximations des nombres suivants

$$(2,001)^3, \quad (1.997)^3 \text{ et } (-1.999)^3.$$

4) Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$

1. Développer $(x - 1)(x^2 + x + 1)$.
2. Déterminer la limite du taux d'accroissement $t(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ à droite en 1.
3. En déduire que f n'est pas dérivable en 1.
4. Que peut-on dire de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 ?

5) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 3x - 2$$

et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Donner les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$
2. Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
3. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ aux point d'abscisses -1, 0 et 1.
4. Donner l'allure de $\mathcal{C}$ en traçant sur le même schéma les tangentes précédentes.

6) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par

$$f(x) = 2x + 1 - \frac{2}{x-3}.$$

et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. (a) Donner les limites de f à gauche et à droite en 3.
(b) En déduire une asymptote de $\mathcal{C}$.
 2. (a) Donner les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
(b) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ et $-\infty$.
(c) Déterminer la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$
 3. Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
 4. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 .
 5. Donner l'allure de $\mathcal{C}$ en traçant sur le même schéma les asymptotes et la tangente précédentes.
-

7) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$, et on note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormal.

1. **Etude d'une fonction auxiliaire**

On pose $g(x) = x^3 + 3x + 8$.

- (a) Déterminer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.
 - (b) Etudier le sens de variation de g .
 - (c) On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α . avec $\alpha \approx -1.5$
Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x (on distinguera les cas $x < \alpha$ et $x > \alpha$).
2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 1)^2}$$

- (b) Donner le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ (on fera figurer le réel α défini à la question 1.c)
 - (c) Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
 - (d) Dresser le tableau de variation de f .
3. On considère les trois points I , J et K d'abscisses respectives 1, 0 et -1 .
Déterminer une équation des tangentes à $\mathcal{C}$ en I , J et K .
4. (a) Montrer qu'il existe quatre réels a , b , c et d tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + 1}.$$

- (b) En déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique Δ et étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ .
Vérifier en particulier que $\mathcal{C}$ rencontre Δ en un unique point A .
5. Tracer Δ et $\mathcal{C}$ ainsi que les trois points I , J et K d'abscisses respectives 1, 2 et -1 , avec leurs tangentes.
On prendra comme échelle deux centimètres pour une unité sur les deux axes. On donne $f(\alpha) \approx -2.25$

8) On considère la fonction f définie, pour tout réel x de $[0, +\infty[$, par la relation :

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$$

1. (a) On note f' la dérivée de f . Calculer, pour tout réel x positif, $f'(x)$.
(b) Etudier, suivant les valeurs de x , le signe de $f'(x)$.
(c) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
(d) Dresser le tableau de variation de f .
2. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et la relation : pour tout n de $\mathbb{N}$

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

- (a) Compléter la fonction Python suivante qui permet de calculer le terme u_n de rang n :

```
1. def u(n) :  
2.     u=....  
3.     for k in range(....) :  
4.         u=....  
5.     return....
```

- (b) Calculer u_1 et u_2 .
- (c) Montrer par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$0 < u_n \leq \frac{1}{n}$$

9) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{6u_n + 1}{u_n + 1} \end{cases}$$

1. Etudier les variations de la fonction $f(x) = \frac{6x+1}{x+1}$ sur $[0, +\infty[$
2. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq 6$$

10)

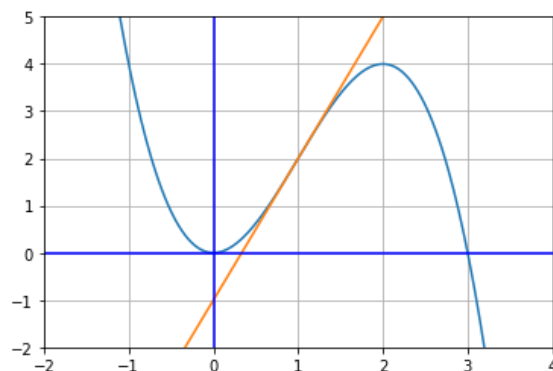
1. Calculer la dérivée 5ème de la fonction $f(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 2$.
2. Déterminer la dérivée nième de $f(x) = x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

11) On note $\mathcal{C}$ la représentation graphique de la fonction $x \mapsto x^2(3-x)$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = 3x - 1$

Compléter le programme Python suivant afin qu'il affiche les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sur l'intervalle $[-2,4]$:

```
1. import numpy as np
2. import matplotlib.pyplot as plt
5. x=....
6. y=....
6. z=....
7. plt.plot(x,y)
7. plt.plot(x,z)
8. plt.show()
```

On obtient le graphique suivant :



1. Dans cette question on suppose que la courbe $\mathcal{C}$ représente une fonction f .
 - (a) En justifiant par des lectures graphiques, examiner la convexité de la fonction f .
 - (b) Retrouver par le calcul le résultat précédent.
2. Dans cette question on suppose que la courbe $\mathcal{C}$ représente la fonction dérivée f' d'une fonction f .
 - (a) En justifiant par des lectures graphiques, examiner la convexité de la fonction f .
 - (b) Retrouver par le calcul le résultat précédent.
3. Dans cette question on suppose que la courbe $\mathcal{C}$ représente la fonction dérivée seconde f'' d'une fonction f .
 - (a) En justifiant par des lectures graphiques, examiner la convexité de la fonction f .
 - (b) Retrouver par le calcul le résultat précédent.

12) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par :

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

1. Déterminer la convexité de f .
2. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
3. Soit B le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 2. Déterminer une équation de la droite (AB)
4. Montrer que pour tout $x \in [1, 2]$ on a :

$$2 \leq f(x) \leq \frac{9}{4}x - \frac{1}{4}$$

13) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
(b) Montrer que la fonction f est paire.
Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
2. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.
(b) En déduire une asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. (a) Déterminer la fonction f' et en étudier le signe ;
(b) Etablir le tableau complet des variations de f .
4. (a) Montrer que pour tout réel x

$$f''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3}$$

- (b) Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe et ceux sur lesquels f est concave.
- (c) Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.
5. (a) Préciser l'équation cartésienne de la tangente (T) au point A de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 1.
(b) On note B le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 2.
Calculer l'ordonnée de B .
(c) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -\frac{3}{10}x + \frac{4}{5}$ passe par les points A et B .
(d) Donner sans calcul les positions relatives de $\mathcal{C}_f$, de (D) et de (T) sur l'intervalle $[1, 2]$?
6. Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$ en traçant sur un même schéma les droites (D) et (T) .
On prendra 4 cm comme unité. On donne $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.6$.