

Espaces probabilisés finis

1 Notions sur les ensembles

1.1 Ensemble, partie d'un ensemble

La notion d'ensemble est une notion intuitive que l'on ne cherchera pas vraiment à définir.

Disons seulement qu'un **ensemble** est une collection d'objets, appelés ses **éléments**, considérés sans ordre ni répétition.

" x est un élément de l'ensemble E " se dit aussi " x appartient à E " et se note $x \in E$.

On écrit un ensemble en extension quand on écrit tous ses éléments entre accolades. Par exemple :

$$\{1, 2\} = \{1, 1, 2\} = \{2, 1\}$$

Un ensemble sans élément est dit **vide**; on le note $\emptyset$.

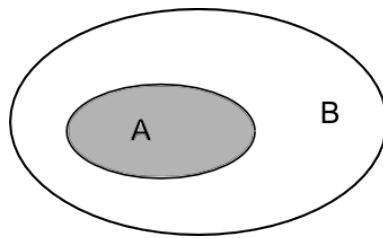
Un ensemble à un seul élément est appelé un **singleton**.

Définition

Un ensemble A est dit inclus dans un ensemble B si tout élément de A est aussi un élément de B .
On dit aussi que A est un sous-ensemble de B ou une partie de B .

On note

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in B$$



Deux ensembles sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments. L'égalité équivaut donc à la double inclusion :

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ et } B \subset A$$

Définition

L'ensemble de toutes les parties d'un ensemble E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Il contient en particulier la partie vide $\emptyset$ et la partie pleine E .

On a l'équivalence :

$$A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$$

Exemple

Si

$$E = \{1, 2, 3\}$$

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

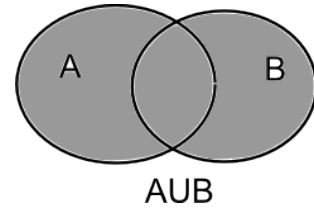
1.2 Opérations sur les ensembles

Tous les ensembles ici considérés sont supposés être inclus dans un ensemble E dit de référence.

Définition

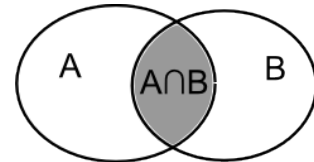
- La **réunion** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B .
On le note $A \cup B$.
On a donc

$$A \cup B = \{x \in E ; x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



- La **intersection** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A et à B .
On le note $A \cap B$.
On a donc

$$A \cap B = \{x \in E ; x \in A \text{ et } x \in B\}$$



Remarques :

Toutes parties A et B de E vérifient les relations ci dessous :

- $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$ et $(A \cap B) \subset B \subset (A \cup B)$.
- $A \cup (A \cap B) = A$ et $A \cap (A \cup B) = A$.

Définition

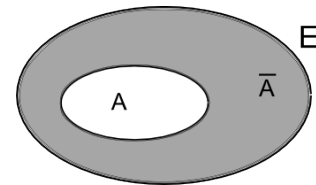
Deux parties A et B de E sont dites disjointes si et seulement si $A \cap B = \emptyset$

Définition

Le **complémentaire** d'un ensemble A (dans E) est l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A . On le note $\bar{A}$.

On a donc

$$\bar{A} = \{x \in E ; x \notin A\}$$



Remarques :

On a en particulier :

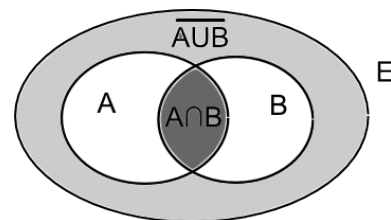
$$A \cup \bar{A} = E \quad \text{et} \quad A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$\bar{\emptyset} = E \quad \text{et} \quad \bar{E} = \emptyset$$

Proposition : Lois de Morgan

Soient A et B deux parties d'un ensemble E .

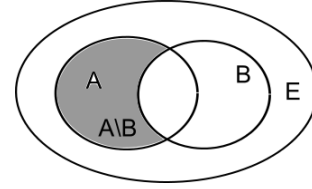
$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$



Définition

Soient A et B deux parties d'un ensemble E . On appelle A privé de B l'ensemble :

$$A \setminus B = \{x \in A, x \notin B\} = A \cap \overline{B}$$



Définition

Soient A et B deux ensembles.

On appelle **produit cartésien** de A et B l'ensemble noté $A \times B$ et défini par :

$$A \times B = \{(x, y), x \in A \text{ et } y \in B\}$$

En particulier on note

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y), x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

1.3 Cardinal d'un ensemble fini

Définition

Si E est un ensemble fini on note $\text{Card}(E)$ (cardinal de E) le nombre d'éléments de E .

Remarques

Si E est un ensemble fini, son cardinal ainsi que celui de chacune de ses parties est fini.

On notera 0 le cardinal de l'ensemble vide.

Proposition

Si A et B sont deux parties disjointes de E alors

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$$

Plus généralement si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont n parties deux à deux disjointes de E alors

$$\text{Card}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \text{Card}(A_k)$$

Proposition

- $\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad \text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$
- $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, \quad A \subset B \Rightarrow \text{Card}(A) \leq \text{Card}(B)$
- $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, \quad \text{Card}(A \setminus B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B)$
- Formule de Poincaré
 $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, \quad \text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$

Proposition

Soient A et B deux ensembles finis. L'ensemble $A \times B$ est aussi un ensemble fini et

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$$

2 Expérience aléatoire - univers - événements

2.1 Expérience aléatoire - univers

- Une expérience aléatoire est une expérience physique dont l'issue n'est pas déterminée a priori (notion de hasard).
Par exemple si l'on lance deux dés, on ne peut pas savoir à l'avance quelles sont les faces qui vont apparaître. Il est certain que deux faces apparaîtront à l'issue de l'expérience, mais on ne peut pas prédire lesquelles avec certitude (aléatoire vient du latin alea qui signifie dé).
- On associe à chaque expérience aléatoire un ensemble noté Ω , appelé univers, dont les éléments vont représenter les différentes issues possibles de l'expérience aléatoire.
- Ces éléments sont appelés les possibles. On désigne un possible quelconque par ω .

Exemple 1 :

On lance un dé non pipé. Le résultat obtenu est un nombre entre 1 et 6. On a alors

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Exemple 2 :

Lançons un dé rouge et un dé vert. On peut coder le résultat de l'expérience par un couple d'entiers de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On pose

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2 = \{(a, b) \text{ où } a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ et } b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

Exemple 3 :

Une urne contient 10 boules blanches et 15 boules noires.

Tirons successivement 4 boules, sans remettre dans l'urne les boules tirées.

Ω est l'ensemble des listes de 4 éléments de $\{\text{blanc, noir}\}$.

Exemple 4 :

On tire 8 cartes dans un jeu de 32 cartes.

Ω est l'ensemble des parties à 8 éléments de l'ensemble des 32 cartes.

Définition

Toute expérience aléatoire possède un univers Ω de possibles ω qui décrivent mathématiquement les issues de cette expérience.

Remarque

Lorsque l'expérience aléatoire admet un nombre fini de résultats possibles, on dit que l'univers Ω est fini.

2.2 Événements - opérations sur les événements.

2.2.1 Événements

Un événement lié à une expérience aléatoire est un fait pouvant être réalisé ou non réalisé à l'issue de l'expérience. Sa réalisation ne dépend que de l'issue de l'expérience.

Définition

On appelle événement lié à l'expérience aléatoire toute partie de Ω .

Exemples :

1. On reprend l'exemple 1 (lancer d'un dé). $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
 - L'événement B : "le numéro obtenu est pair" correspond au sous-ensemble $B = \{2, 4, 6\}$.
 - L'événement C : "le numéro obtenu est inférieur ou égal à 3" correspond au sous-ensemble $C = \{1, 2, 3\}$.
2. Reprenons l'exemple 2 précédent. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$.
 - On appelle A l'événement "les deux dés amènent 1".
 A est réalisé lorsque le résultat est $(1, 1)$. On note $A = \{(1, 1)\}$.
 - On appelle B l'événement "la somme des numéros tirés est 6".
 B est réalisé par les résultats correspondant aux possibles $(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$.
On note $B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$.
3. On reprend l'exemple 3 précédent.
On note C l'événement "on a obtenu 1 boule blanche".
 $C = \{(B, N, N, N); (N, B, N, N); (N, N, B, N); (N, N, N, B)\}$

2.2.2 Evénements particuliers.

- $\Omega \in \mathcal{P}(\Omega)$ est un événement appelé événement certain.
Tous les éléments de Ω sont dans l'événement Ω , il est donc certain que cet événement se réalise.
- $\emptyset \in \mathcal{P}(\Omega)$ est un événement appelé événement impossible.
Aucun élément de Ω n'est dans $\emptyset$, ie aucun résultat de l'expérience aléatoire n'est dans l'événement $\emptyset$, il est donc impossible que cet événement se réalise.
- On appelle événement élémentaire tout événement A du type $A = \{\omega\}$ avec $\omega \in \Omega$ (ie tout sous-ensemble de Ω ne contenant qu'un seul élément).

Exemples :

On lance un dé. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1. L'événement "on obtient un entier positif" est l'événement certain.
2. L'événement "on obtient un entier supérieur ou égal à 10" est l'événement impossible.
3. L'événement A : "le numéro obtenu est 2" est un événement élémentaire $A = \{2\}$.
De même $\{1\}$, $\{5\}$ et $\{6\}$ sont des événements élémentaires.

2.2.3 Opérations sur les événements.

Définition

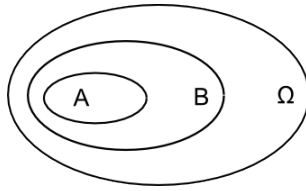
Soit Ω un univers. Pour tout événement A de Ω , le complémentaire de A dans Ω est appelé événement contraire de A . On le note $\overline{A}$.

Exemples :

1. On reprend l'expérience 2 (lancé d'un dé rouge et d'un dé vert), $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2$.
Soit A l'événement "les deux chiffres obtenus sont pairs".
Alors $\overline{A}$ est l'événement "l'un au moins des deux chiffres obtenus est impair".
2. On reprend l'expérience 3.
Soit A l'événement "On obtient au moins une boule blanche".
 $\overline{A}$ est l'événement "toutes les boules tirées sont noires".

Définition

Pour tous événements A et B d'un univers Ω tel que $A \subset B$, on dit que l'événement A implique l'événement B ie si A est réalisé alors B est réalisé.



Remarque :

$$A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$$

Exemple :

On lance 50 fois une pièce de monnaie.

Soit A l'événement "le nombre de Pile obtenus est un multiple de 6" et B l'événement : "on obtient un nombre pair de Pile" et .

On a alors $A \subset B$ ie A implique B .

Définition

Soit Ω un univers.

- La réunion de deux événements A et B est un événement noté $A \cup B$.
 $A \cup B$ est réalisé si " A est réalisé ou B est réalisé".
- L'intersection de deux événements A et B est un événement noté $A \cap B$.
 $A \cap B$ est réalisé si " A est réalisé et B est réalisé".

Exemple :

On reprend l'exemple du lancer d'un dé rouge et d'un dé vert. On rappelle que $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2$. Soit A l'événement "les deux numéros sont identiques" et B l'événement "les deux numéros sont pairs".

$$A = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (5, 5); (6, 6)\} \text{ et}$$

$$B = \{(2, 2); (2, 4); (2, 6); (4, 2); (4, 4); (4, 6); (6, 2); (6, 4); (6, 6)\}$$

$A \cup B$ est l'événement "les deux événements sont identiques ou pairs"

$$A \cup B = \{(1, 1); (2, 2); (2, 4); (2, 6); (3, 3); (4, 2); (4, 4); (4, 6); (6, 2); (5, 5); (6, 4); (6, 6)\}$$

$A \cap B$ est l'événement "les deux événements sont identiques et pairs"

$$A \cap B = \{(2, 2); (4, 4); (6, 6)\}$$

Remarque :

Soit Ω un univers fini.

Tout événement A est une réunion finie d'événements élémentaires.

Exemple :

On lance un dé. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- L'événement B : "le numéro obtenu est pair" correspond au sous-ensemble $B = \{2, 4, 6\}$. B est la réunion des événements élémentaires $\{2\}$, $\{4\}$ et $\{6\}$.
- L'événement C : "le numéro obtenu est inférieur ou égal à 3" :
 $C = \{1, 2, 3\} = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$.

Définition

Soient A et B deux événements de Ω dont l'intersection est l'événement impossible : $A \cap B = \emptyset$, alors les événements A et B sont dits incompatibles.

Exemples :

1. On reprend l'exemple du lancer d'un dé rouge et d'un dé vert.
Soit A l'événement "les deux numéros sont pairs" et B l'événement "le premier numéro est impair".
 $A \cap B = \emptyset$ et A et B sont incompatibles.
2. D'une manière générale A et $\bar{A}$ sont incompatibles.

2.2.4 Système complet d'événements.

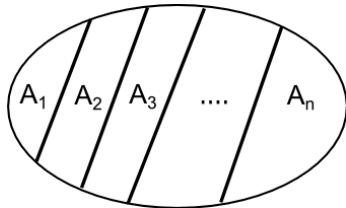
Définition

On appelle système complet d'événements tout n -uplet $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ d'événements :

- deux à deux incompatibles : $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$
- de réunion l'événement certain Ω :

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^n A_k.$$

Remarque :



Un système complet d'événements est donc une partition de Ω

Exemples :

1. Si $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ alors $(\{1, 2\}; \{3, 5, 6\}; \{4\})$ est un système complet d'événements.
2. Un consommateur choisit chaque semaine chez le pâtissier un dessert parmi les trois desserts A , B et C .

On notera pour tout entier naturel non nul :

A_n l'événement : " M a choisi le dessert A la n -ième semaine "

B_n l'événement : " M a choisi le dessert B la n -ième semaine "

C_n l'événement : " M a choisi le dessert C la n -ième semaine "

Alors pour tout $n \geq 1$ (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements.

En effet les événements A_n , B_n et C_n sont

- deux à deux incompatibles (on ne choisit qu'un seul dessert la n -ième semaine)
- de réunion l'événement certain (on choisit forcément l'un des trois desserts).

3. Pour tout événement A , $A \neq \Omega$ et $A \neq \emptyset$, la famille $(A, \bar{A})$ est un système complet d'événements.
4. Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est un univers fini.
La famille $(\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_n\})$ formée des événements élémentaires est un système complet d'événements.

3 Probabilité

3.1 Introduction et définition

- La description d'une expérience aléatoire à l'aide d'un univers Ω et de l'ensemble des événements n'est pas complète.
Prenons l'exemple du lancer d'un dé à 6 faces.
L'univers Ω est $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et l'ensemble des événements est $\mathcal{P}(\Omega)$.
Mais selon que le dé soit pipé ou non, l'expérience aléatoire se déroule différemment.
Si le dé fait jouer un rôle identique aux 6 faces, on ne peut prédire la venue d'une face plutôt qu'une autre.
Si ce dé est au contraire plombé de sorte que la face 6 arrive très fréquemment, on optera plutôt pour la sortie du 6.
- On cherche à formuler cette notion de possible auquel on s'attend plus ou moins, aux événements d'une expérience aléatoire.
- L'idée est d'attribuer à chaque événement A un nombre réel $P(A)$, appelé sa probabilité pour mesurer "le degré plus ou moins probable de réalisation de cet événement".

On impose les conditions :

- $P(A) \in [0, 1]$,
- $P(\emptyset) = 0$ et $P(\Omega) = 1$,
- Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont n événements deux à deux incompatibles

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

Par exemple, dans le lancer de dé, si A est l'événement "le numéro sorti est pair" il est naturel que $P(A) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\})$.

- On souhaite également que plus la probabilité est proche de 1, plus l'événement A est probable, plus la probabilité est proche de 0, moins l'événement est probable.

Définition

Soit Ω un univers et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements de Ω .

On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ toute application P définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ et à valeurs dans $[0, 1]$ telle que

1. $P(\Omega) = 1$,
2. Pour toute famille $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ d'événements deux à deux incompatibles alors

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$$

en particulier si $n = 2$, pour tout couple (A, B) d'événements incompatibles

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Remarque :

Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est appelé espace probabilisé

3.2 Probabilités sur un univers fini.

La probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est entièrement déterminé par les probabilité des événements élémentaires.

Théorème

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$,

- Il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ tel que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $P(\{\omega_i\}) = p_i$ si et seulement si

$$\begin{cases} \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket & p_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^n p_i = 1 \end{cases}$$

- P est alors unique et pour tout événement $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_p}\}$

$$P(A) = \sum_{k=1}^p P(\{\omega_{i_k}\}) = \sum_{i=1}^p p_{i_k}.$$

Démonstration :

- Il est clair que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $p_i = P(\{\omega_i\}) \geq 0$.
- De plus les événements élémentaires $\{\omega_i\}_{1 \leq i \leq n}$ sont deux à deux incompatibles et $\Omega = \bigcup_{i=1}^n \{\omega_i\}$
donc

$$P(\Omega) = 1 = \sum_{i=1}^n P(\{\omega_i\}) = \sum_{i=1}^n p_i$$

- Réciproquement on vérifie que si $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_p}\}$ est un événement quelconque, l'application P définie par

$$P(A) = \sum_{k=1}^p p_{i_k}$$

est une probabilité.

Exercice 1 :

On considère un dé pipé tel que, pour $k \in \{1, 2, \dots, 6\}$, la probabilité d'obtenir la face numéro k est égale à αk .

1. Quelle est la valeur de α ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?
3. quelle est la probabilité d'obtenir un nombre inférieur ou égal à 3 ?

Exercice 2 :

On suppose dans cette question que le dé est truqué de telle sorte que :

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \frac{1}{6}, \quad P(\{3\}) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{9}$$

1. Vérifier que l'on définit bien une probabilité sur $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$.
2. Redonner la probabilité des deux événements précédents.

3.3 Un cas particulier important : l'équiprobabilité

Définition

On dit qu'il y a équiprobabilité, lorsque les probabilités de tous les événements élémentaires sont égales.
On dit aussi que P est la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Compte tenu de la relation $\sum_{i=1}^n P(\{\omega_i\}) = 1$ il vient

$$\text{pour tout } k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad P(\{\omega_k\}) = \frac{1}{n} = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}.$$

De plus si $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_p}\}$ est un événement

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{\omega_{i_1}\}) + P(\{\omega_{i_2}\}) + \dots + P(\{\omega_{i_p}\}) \\ &= \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{p \text{ fois}} = \frac{p}{n} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} \end{aligned}$$

d'où la proposition suivante :

Proposition

Soit Ω un univers fini. S'il y a équiprobabilité, pour tout événement A on a

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

On écrit aussi

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Le mot "favorable" signifie ici "réalisant A ".

Exercice 3 :

1. Une urne contient 2 boules noires et 3 boules blanches.
On tire une boule dans cette urne, quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?
2. Une urne contient une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2, ..., dix boules numérotées 10. On tire une boule au hasard dans cette urne.
Quelle est la probabilité de tirer une boule numéro 5 ?
3. On lance deux dés non pipés.
Quelle est la probabilité que la somme des numéros obtenus soit égale à 6 ?
4. Une urne contient 2 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher.
On pioche simultanément deux boules dans cette urne.
Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur ?
5. On considère deux urnes :
Une urne bleue contenant initialement un jeton marqué 0 et un jeton marqué 1.
Une urne rouge contenant initialement un jeton marqué 0 et un jeton marqué 1.
On appelle « échange » l'action consistant à extraire simultanément un jeton de chaque urne puis à le remettre dans l'autre urne.
Quelle est la probabilité qu'après un échange, la somme des jetons présents dans l'urne bleue soit égale à 0 ? à 1 ? à 2 ?

3.4 Propriétés d'une probabilité

Propriété

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.

Soient A et B deux événements. On a

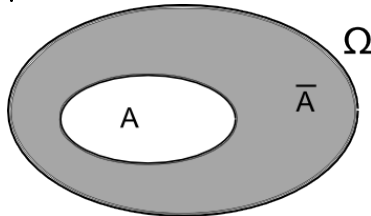
1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
En particulier $P(\emptyset) = 0$.
2. Si $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$.
3. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
En particulier si $B \subset A$ alors $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$

Démonstration

On peut visualiser les propriétés des probabilités en représentant Ω par une portion de plan d'aire 1, et chaque événement A par une partie de Ω d'aire $P(A)$.

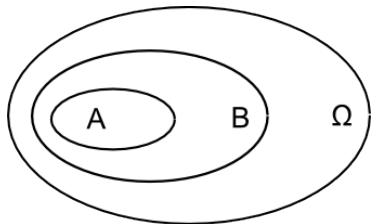
Les propriétés des probabilités sont formellement identiques à celles des aires.

1. .



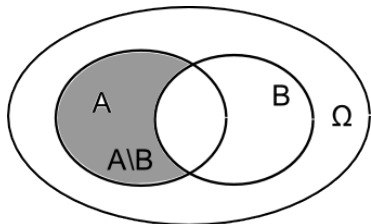
$\Omega = A \cup \bar{A}$ avec $A \cap \bar{A} = \emptyset$
donc $P(\Omega) = 1 = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$
donc $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
Comme $\emptyset = \bar{\Omega}$, $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$.

2. .

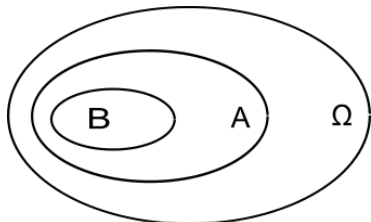


Si $A \subset B$ alors $B = A \cup (B \setminus A)$ avec $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$,
d'où $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$
et comme $P(B \setminus A) \geq 0$, $P(A) \leq P(B)$.

3. .



$A \setminus B = A \cap \bar{B}$.
On a $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ avec $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$
d'où $P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$
et $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$



Si $B \subset A$ alors $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$
car $A \cap B = B$

Exercice 4 :

En supposant que chaque naissance donne, de façon équiprobable, un fille ou un garçon, déterminer la probabilité que, dans une famille de cinq enfants choisie au hasard, il y ait :

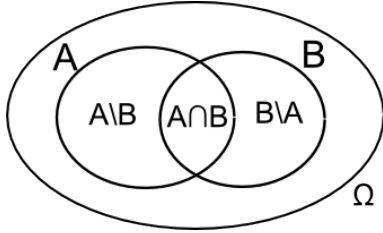
1. au moins une fille
2. plus de filles que de garçons.

Proposition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.
 Pour tout couple d'événements (A, B)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Démonstration :



L'événement $A \cup B$ est une réunion des trois événements deux à deux incompatibles $A \setminus B$, $B \setminus A$ et $A \cap B$ d'où

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

Exercice 5 :

On choisit un nombre au hasard entre 0 et 99.

Quelle est la probabilité pour que celui-ci soit un multiple de 2 ou de 5 ?

Proposition

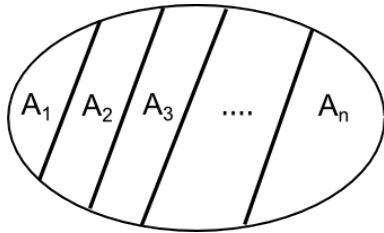
Soit Ω un univers. Soit $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ un système complet d'événement

1. $\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$.
2. *Formule des probabilités totales (première version) :*
 Pour tout événement B de Ω

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i)$$

Démonstration

1. .

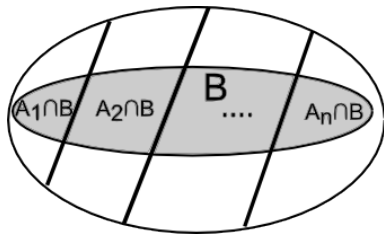


Les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont deux à deux incompatibles donc

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

de l'égalité $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ découle $P(\Omega) = \sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$.

2. .



Comme les événements A_i sont deux à deux incompatibles, les événements $B \cap A_i$ sont deux à deux incompatibles.

De plus $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ donc

$$B = \Omega \cap B = \left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cap B = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B),$$

$$\text{d'où } P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B)\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i \cap B).$$

Exercice 6 :

On lance successivement deux dés équilibrés.

On note :

- E_1 l'événement " le résultat du premier dé est strictement supérieur au résultat du deuxième dé"
- E_2 l'événement " le résultat du premier dé est strictement inférieur au résultat du deuxième dé"
- E_3 l'événement " les résultats des deux dés sont égaux"

1. Calculer la probabilité de l'événement E_3 .
2. Justifier que $P(E_1) = P(E_2)$
3. Montrer que E_1, E_2, E_3 est un système complet d'événements.
4. En déduire la probabilité des événements E_1 et de E_2

Remarque :

Avec $n = 2$ en posant $A_1 = A$ et $A_2 = \bar{A}$, la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $(A, \bar{A})$ s'écrit :

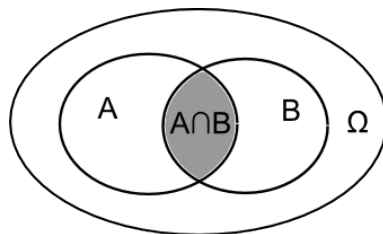
$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$$

4 Probabilités conditionnelles.

4.1 Définition d'une probabilité conditionnelle

Introduction :

- On lance une fois un dé non pipé.
Soit A l'événement "on obtient un nombre inférieur ou égal à 5" et B l'événement "on obtient un nombre supérieur ou égal à 3".
Supposons que l'on sache que A est réalisé. Le résultat du lancer est donc un élément de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ il y a donc 5 cas possibles.
 B est réalisé si et seulement si $\omega \in \{3, 4, 5\}$, il y a donc 3 cas favorables pour que B soit réalisé.
La probabilité que B soit réalisé sachant que A l'est est de $\frac{3}{5}$.
Or $P(A) = \frac{5}{6}$ et $P(A \cap B) = \frac{3}{6}$ donc $\frac{3}{5} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.
- Pour définir "la probabilité de B sachant que A est réalisé" on suit une idée de proportionnalité : on mesure l'événement $A \cap B$ par rapport à l'événement A (considéré comme un nouvel univers).



Proposition et définition

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et A un événement de probabilité non nulle.

- L'application

$$P_A \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0, 1] \\ B & \longmapsto & \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \end{array} \right)$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ appelé probabilité conditionnelle relative à A ou probabilité sachant A .

- Pour tout événement B , $\frac{P(B \cap A)}{P(A)}$ est appelé probabilité de B sachant A , noté $P_A(B)$.

$$\text{On a donc : } P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Démonstration

- P_A est bien une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$.
En effet si $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $(A \cap B) \subset A$
donc $0 \leq P(A \cap B) \leq P(A)$ et $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \in [0, 1]$.
- $P_A(\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$.
- Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont n événements deux à deux incompatibles

$$\begin{aligned} P_A(A_1 \cup A_2 \cup \dots, \cup A_n) &= \frac{P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cap A\right)}{P(A)} \\ &= \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^n (A_i \cap A)\right)}{P(A)} = \frac{\sum_{i=1}^n P(A_i \cap A)}{P(A)} = \sum_{i=1}^n P_A(A_i). \end{aligned}$$

Remarques :

- Si A et B sont incompatibles $P_A(B) = P_B(A) = 0$.
- Il y a deux méthodes pour calculer une probabilité conditionnelle :
 - en appliquant la définition (méthode calculatoire)
 - en interprétant cette probabilité (la justification se fera alors à l'aide d'une phrase).

Exercice 7 :

On considère une urne U contenant deux boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher, ainsi qu'une urne V contenant une boule blanche et trois boules noires, elles aussi indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages d'une boule dans ces urnes en procédant comme suit :

- le premier tirage a lieu dans l'urne U .
- tous les tirages s'effectuent avec remise de la boule piochée dans l'urne dont elle provient ;
- si l'on pioche une boule **blanche** lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans **l'autre** urne ;
- si l'on pioche une boule **noire** lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans **la même** urne.

On note B_1 (respectivement B_2) l'événement " on obtient une boule blanche au premier tirage" (respectivement au deuxième tirage) et N_1 (respectivement N_2) l'événement " on obtient une boule noire au premier tirage" (respectivement au deuxième tirage).

Déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{B_1}(B_2), \quad P_{B_1}(N_2), \quad P_{N_1}(B_2), \quad P_{N_1}(N_2)$$

Proposition

Soit Ω un univers fini et P la probabilité uniforme sur Ω .

Pour tout événement A de probabilité non nulle et pour tout événement B ,

$$P_A(B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A)}$$

Démonstration :

Par définition de la probabilité conditionnelle, pour toute partie B de Ω , $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

par équiprobabilité $P(A \cap B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(\Omega)}$ et $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ d'où le résultat.

Remarque :

Il n'est pas nécessaire de calculer $\text{Card}(\Omega)$.

Exercice 8 :

On reprend l'exemple du lancer successif de deux dés non pipés. $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2$.

Notons A l'événement "le joueur obtient un nombre pair au premier lancer" et B l'événement "la somme des numéros obtenus vaut 6" .

Déterminer $P_A(B)$.

Proposition

Soit A un événement de probabilité non nulle et B un événements de Ω .

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

Exercice 9 :

On reprend le protocole de l'exercice 7. Quelle est la probabilité après le deuxième tirage d'avoir obtenu aucune boule blanche ? une boule blanche ? deux boules blanches ?

Proposition

Soit A un événement de probabilité non nulle, B et C désignent des événements de Ω .

1. $P_A(\emptyset) = 0$
2. $0 \leq P_A(B) \leq 1$
3. $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$
4. Si $A \subset B$ alors $P_A(B) = 1$ en particulier $P_A(A) = 1$
5. $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)$

Démonstration :

Tout résulte de la définition et des propriétés d'une probabilité.

4.2 Formule des probabilités composées

Théorème : Formule des probabilités composées

Soit n un entier naturel, supérieur ou égal à 2.

Pour toute famille finie $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ tel que $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Remarque :

Comme P est croissante et que

$$A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \subset A_1 \cap \dots \cap A_{n-2} \subset \dots \subset A_1 \cap A_2 \subset A_1$$

l'hypothèse $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$ entraîne $P(A_1) \neq 0$, $P(A_1 \cap A_2) \neq 0 \dots$ ce qui justifie l'existence des différentes probabilités conditionnelles du produit dans le second membre.

Démonstration :

$$\begin{aligned} & P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n) \\ &= P(A_1) \times \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \times \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \times \dots \times \frac{P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n)}{P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})} \end{aligned}$$

Le numérateur d'un facteur se simplifie avec le dénominateur du facteur suivant et il reste $P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$.

Remarque :

Cette formule est utile surtout quand les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont dans un ordre chronologique (ie représentent des événements s'étant succédés dans cet ordre au cours du temps).

Exercice 10 :

Une urne contient 10 boules dont 4 blanches et 6 rouges, indiscernables au toucher.

On tire 4 boules successivement sans remise.

Pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ on notera R_i l'événement "La $i^{\text{ième}}$ boule tirée est rouge".

1. Quelle est la probabilité qu'une boule rouge apparaisse pour la première fois au 3^{ième} tirage ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 boules de la même couleur ?

4.3 Représentation à l'aide d'un arbre de probabilités

Afin de mieux comprendre les situations liées aux probabilités conditionnelles, on peut (et c'est vivement conseillé) réaliser un arbre de probabilités.

Les règles de représentation d'un arbre pondéré sont :

- une branche relie un événement qui succède à un autre événement duquel il dépend. Il en est conditionné.
- sur chaque branche figure la probabilité conditionnelle de l'événement.
- la somme des probabilités affectées aux branches issues d'un même noeud est égale à 1.

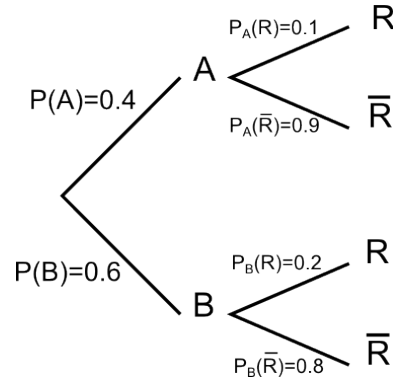
Exemple :

Chaque jour, une entreprise envoie un colis. Elle utilise les services des sociétés de transport A ou B . La probabilité pour que la société A livre le colis avec retard est de 0.1, alors que la probabilité pour que la société B livre avec retard est de 0.2.

Pour des raisons tarifaires, l'entreprise décide d'utiliser la société B dans 60% des cas, et la société A dans 40% des cas.

On note A l'événement "le colis est livré par la société A ", B l'événement "le colis est livré par la société B " et R l'événement "le colis est livré en retard".

Représentons la situation à l'aide d'un arbre de probabilité. :



4.4 Formule des probabilités totales (deuxième version)

Théorème : Formule des probabilités totales

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un univers probabilisé et $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ un système complet d'événements tel que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ $P(A_i) \neq 0$.

Soit B un événement lié à l'expérience aléatoire.

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \times P_{A_i}(B).$$

Remarque

Si A est un événement de probabilité différente de 0 ou de 1, $(A, \bar{A})$ est un système complet d'événement, $P(A) \neq 0$ et $P(\bar{A}) \neq 0$ d'où pour tout événement B

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B).$$

Démonstration

Soit $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ un système complet d'événements.

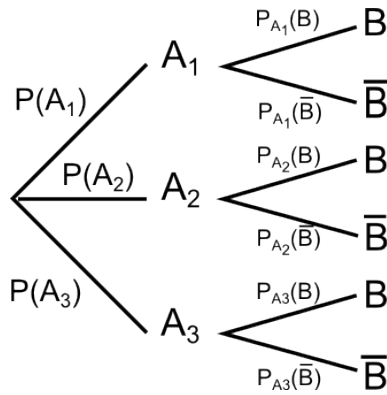
La première version de la formule des probabilités totales donne pour tout événement B ,

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i)$$

or $P(B \cap A_i) = P(A_i)P_{A_i}(B)$ d'où le résultat.

Remarques :

- Cette formule est utilisée quand deux expériences aléatoires successives sont réalisées.
 - Le système complet d'événements $(A_1, \dots, A_n)$ énumère les différentes issues de la première expérience.
 - La réalisation de B est liée à la deuxième expérience et dépend du résultat de la première.
- On peut la plupart du temps représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilité.
Dans le cas d'un système complet à trois événements, on a le schéma suivant :



$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + P(A_3) \times P_{A_3}(B)$$

Exercice 11 :

Une pièce est fabriquée par un atelier disposant de trois machines.

La machine A produit 30% des pièces, la machine B 20% et la machine C 50%.

5% des pièces produites par la machine A sont défectueuses, 4% des pièces produites par la machine B sont défectueuses et 8% des pièces produites par la machine C sont défectueuses.

On note A l'événement "la pièce est fabriquée par la machine A"

B l'événement "la pièce est fabriquée par la machine B"

C l'événement "la pièce est fabriquée par la machine C"

D l'événement "la pièce est défectueuse"

Déterminer la probabilité qu'une pièce choisie au hasard soit défectueuse.

Exercice 12 :

On reprend le protocole de l'exercice 7.

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on note U_n l'événement "le n -ième tirage s'effectue dans l'urne U ".

1. Que vaut $P(U_1)$?
2. Calculer $P(U_2)$.
3. Donner les valeurs de $P_{U_2}(U_3)$ et de $P_{\overline{U_2}}(U_3)$. En déduire $P(U_3)$.

Exercice 13 :

On étudie le comportement d'un consommateur M à partir d'une semaine donnée (appelée "semaine 1").

Ce consommateur choisit chaque semaine un dessert parmi les trois desserts A , B et C .

On considère en outre que :

- Si M a choisi le dessert A la semaine n , alors la semaine $n + 1$ il choisit :
 - le dessert A avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ ou le dessert C avec une probabilité de $\frac{2}{3}$.
- Si M a choisi le dessert B la semaine n , alors la semaine $n + 1$ il choisit :
 - le dessert A avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ ou le dessert B avec une probabilité de $\frac{2}{3}$.
- Si M a choisi le dessert C la semaine n , il reprend le dessert C la semaine $n + 1$.

- Le consommateur M choisit de manière équiprobable son dessert la première semaine.

On notera pour tout entier naturel non nul :

A_n l'événement : " M a choisi le dessert A la n -ième semaine "

B_n l'événement : " M a choisi le dessert B la n -ième semaine "

C_n l'événement : " M a choisi le dessert C la n -ième semaine "

1. Donner les probabilités $P_{A_n}(A_{n+1})$, $P_{A_n}(B_{n+1})$, $P_{A_n}(C_{n+1})$
 $P_{B_n}(A_{n+1})$, $P_{B_n}(B_{n+1})$, $P_{B_n}(C_{n+1})$, $P_{C_n}(A_{n+1})$, $P_{C_n}(B_{n+1})$, $P_{C_n}(C_{n+1})$.
2. A l'aide de la formule des probabilités totales, justifier avec soin que

$$P(A_{n+1}) = \frac{1}{3}P(A_n) + \frac{1}{3}P(B_n)$$

Donner de même les relations exprimant $P(B_{n+1})$ et $P(C_{n+1})$ en fonction de $P(A_n)$, $P(B_n)$, $P(C_n)$.

4.5 Formule de Bayes

la probabilité conditionnelle $P_A(B)$ apparait naturellement lorsque :

- l'événement B est une conséquence de A .
- l'événement B est postérieur à A .

La formule de Bayes est utile dans d'autres cas, on l'appelle également "formule de probabilité des causes" ou "formule d'inversion des probabilités."

Proposition : Formule de bayes

Soit $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ un système complet d'événements de probabilités non nulles et B un événement de probabilité non nulle.

Alors pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i)P_{A_i}(B)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P_{A_k}(B)}$$

Remarque :

en particulier pour tout couple d'événements (A, B) de probabilités non nulles

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)}$$

Démonstration :

D'après la formule des probabilités totales $P(B) = \sum_{k=1}^n P(A_k)P_{A_k}(B)$ et

$$P_B(A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P_{A_i}(B)}{P(B)}$$

Exercice 14 :

On reprend l'exercice 11.

On choisit une pièce au hasard et on constate qu'elle est défectueuse.

Calculer la probabilité que cette pièce ait été fabriquée par la machine A.

Exercice 15 :

On reprend le protocole de l'exercice 7.

La deuxième boule tirée est noire. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une boule noire au premier tirage ?

5 Indépendance

5.1 Indépendance entre deux événements

Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

Intuitivement, A et B sont indépendants si la probabilité de l'un est la même que l'on sache ou non que l'autre est réalisé autrement dit si un renseignement sur l'un des événements ne modifie pas la probabilité de réalisation de l'autre.

On a alors $P_B(A) = P(A)$ et $P_A(B) = P(B)$.

Or $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ et $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Ces deux égalités équivalent à $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Cette relation a encore un sens si $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.

On dit que deux événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Dans le cas contraire A et B sont dits dépendants.

Remarques :

- La définition est vérifiée si l'un des deux événements est l'événement impossible.
- La définition est symétrique en A et B .

Exercice 16 :

On lance un dé à 6 faces. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

On pose $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 3\}$.

1. On suppose dans cette question que le dé n'est pas truqué ie que Ω est muni de la probabilité uniforme.
Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. On suppose dans cette question que le dé est truqué de telle sorte que :

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \frac{1}{6}, \quad P(\{3\}) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{9}$$

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Proposition

Soient A et B deux événements de probabilité non nulle.

Il y a équivalence entre

1. A et B sont indépendants
2. $P_A(B) = P(B)$
3. $P_B(A) = P(A)$.

Démonstration :

Par définition de la probabilité conditionnelle $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ or A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ soit $P_A(B) = P(B)$.

Remarques :

- La condition 2 signifie que la réalisation de A n'apporte aucune information sur la réalisation de B .
- L'indépendance de deux événements A et B peut apparaître de plusieurs manières.
 - A et B sont respectivement liés à des expériences aléatoires indépendantes.
 - A et B sont logiquement indépendants.
 - l'indépendance de A et B apparaît dans le calcul.

Exercice 17 :

Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules noires.

On effectue dans cette urne deux tirages d'une boule avec remise.

Soit R_1 l'événement "on obtient une boule rouge au premier tirage" et R_2 l'événement "on obtient une boule rouge au deuxième tirage".

1. Les événements R_1 et R_2 sont-ils indépendants ?
2. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules rouges.

Proposition

Si (A, B) est un couple d'événements indépendants, alors il en est de même pour les couples d'événements $(\bar{A}, B)$, $(A, \bar{B})$ et $(\bar{A}, \bar{B})$.

5.2 Indépendance d'une famille d'événements

Définition

Les événements $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ sont dits deux à deux indépendants si

$$\text{pour tous } i \text{ et } j \text{ entiers de } \llbracket 1; n \rrbracket \text{ tels que } i \neq j \quad P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

ie deux quelconques d'entre eux sont indépendants.

Remarque :

Si A , B et C sont trois événements deux à deux indépendants, cela ne suffit pas pour déterminer la probabilité de $A \cap B \cap C$.

Nous sommes donc amenés à définir une notion d'indépendance plus forte que la précédente :

Définition

Les événements $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ sont dits mutuellement indépendants si

$$\forall p \in \llbracket 1; n \rrbracket, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n \Rightarrow P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_p}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_p})$$

Exercice 18 :

Un enquêteur fait un sondage auprès de familles ayant deux enfants. On suppose les naissances des garçons et des filles équiprobables. On définit les événements suivants :

- A = "la fratrie est mixte",
- B = "l'enfant aîné est une fille",
- C = "le cadet est un garçon."

Les événements A , B et C sont-ils deux à deux indépendants ? mutuellement indépendants ?

Proposition

L'indépendance mutuelle de n événements entraîne leur indépendance deux à deux.

Démonstration :

Il suffit de choisir $p = 2$ dans la définition. La réciproque est fausse.

Proposition

Soient $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ n événements mutuellement indépendants.

1. Alors les événements $B_1, B_2, \dots, B_n$ en posant $B_k = A_k$ ou $B_k = \bar{A}_k$ pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ sont mutuellement indépendants.
2. p quelconques, $p \in \llbracket 2; n \rrbracket$ de ces événements sont mutuellement indépendants.

Remarque :

Il y a plusieurs cas d'indépendance mutuelle de n événements :

- événements liés à des expériences aléatoires indépendantes (ie réalisées dans des conditions telles que connaître le résultat de certaines d'entre elles, ne donne aucune information sur le résultat des autres.)
- événements liés à la même expérience logiquement indépendants.
- indépendance prouvée par le calcul.

Exercice 19 :

On lance 5 fois une pièce qui amène pile avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et face avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

Pour tout $k \in \llbracket 1; 5 \rrbracket$, on note F_k l'événement "face apparaît au $k^{\text{ième}}$ lancer".

1. Déterminer la probabilité de l'événement "on obtient pile pour la première fois au quatrième lancer".
2. Déterminer la probabilité de l'événement "lors des 5 lancers on a obtenu une seule fois face".
3. Déterminer la probabilité de l'événement "lors des 5 lancers on a obtenu au moins une fois face".

Espaces probabilisés finis : exercices

1)

Le gérant d'un magasin de matériel informatique a acheté un stock de boîtes de composants. 5% des boîtes sont abîmées. Le gérant estime que :

- 60% des boîtes abîmées contiennent au moins un composant défectueux,
- 98% des boîtes en bon état ne contiennent aucun composant défectueux,
- les états des diverses boîtes sont indépendants les uns des autres.

1. *Dans cette question, un client achète une des boîtes du lot.*

On désigne par A l'événement : "la boîte achetée est abîmée" et par D l'événement : "la boîte achetée contient au moins un composant défectueux".

(a) Donner les probabilités $P(A)$, $P(\bar{A})$, $P_A(D)$, $P_{\bar{A}}(D)$, $P_A(\bar{D})$ et $P_{\bar{A}}(\bar{D})$.

(b) Calculer la probabilité p de l'événement D .

2. Le client constate qu'un des composant est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté une boîte abîmée ?

3. Les événements "la boîte achetée est abîmée" et "la boîte achetée contient au moins un composant défectueux" sont-ils indépendants ?

4. *Dans cette question, un client achète une boîte par mois.*

Tant qu'il n'a pas trouvé de composant défectueux, le client se fournit dans le même magasin. Au premier composant défectueux trouvée, il change de fournisseur.

On considère que le lot est suffisamment grand pour que la probabilité d'acheter une boîte contenant au moins un composant défectueux soit la même chaque mois et égale à $p = P(D)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on note D_k l'événement "le client a acheté un composant défectueux le k ème mois".

(a) Quelle est la probabilité que le client n'ait pas encore changé de fournisseur le 5ème mois ?

(b) Quelle est la probabilité que le client change de fournisseur le 10ème mois ?

2) Un laboratoire fabrique un alcootest et les essais montrent que :

(1) 2% des personnes contrôlées sont en état d'ébriété.

(2) 95 fois sur 100 l'alcootest a donné un résultat positif alors que la personne était réellement en état d'ébriété.

(3) 95 fois sur 100 l'alcootest a donné un résultat négatif alors que la personne n'était pas en état d'ébriété.

1. Traduire les données sous forme d'un arbre.

2. On essaie l'appareil sur une personne et on constate que le résultat est positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit en état d'ébriété ?

3) Le quart d'une population a été vaccinée contre une maladie donnée. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non vaccinés. On sait en outre qu'il y a un malade sur douze parmi les vaccinés.

1. Calculer la probabilité d'être malade et vacciné. En déduire la probabilité d'être malade.

2. On choisit une personne au hasard et on constate qu'elle n'est pas vaccinée. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ?

4) On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par p_k la probabilité d'obtenir, lors d'un lancer, la face numérotée k (k est un entier et $1 \leq k \leq 6$).

Ce dé a été pipé de telle sorte que :

- les six faces ne sont pas équiprobables
- les nombres p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6 , dans cet ordre, sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $\frac{1}{21}$.

1. Démontrer que $p_k = \frac{k}{21}$ pour $1 \leq k \leq 6$

2. On lance ce dé une fois et on considère les événements suivants :

A : "le nombre obtenu est pair"

B : "le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3"

C : "le nombre obtenu est 3 ou 4".

- Calculer la probabilité de chacun de ces événements.
- Calculer la probabilité que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à trois, sachant qu'il est pair.
- Les événements A et B sont-ils indépendants ? Les événements A et C sont-ils indépendants ?

3. On utilise ce dé pour un jeu. On dispose :

- d'une urne U_1 contenant une boule blanche et trois noires
- d'une urne U_2 contenant deux boules blanches et une noire.

Le joueur lance le dé :

- s'il obtient un nombre pair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_1
- s'il obtient un nombre impair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_2

On suppose que les tirages sont équiprobables et le joueur est déclaré gagnant lorsqu'il tire une boule blanche ; on note G cet événement.

- Déterminer la probabilité de G .
- Le joueur est gagnant. Déterminer la probabilité qu'il ait obtenu un nombre pair lors du lancer du dé.

5) On dispose d'une urne qui contient trois boules A, B et C .

On y effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise de la boule tirée avant de procéder au tirage suivant .

On s'intéresse au nombre de tirages nécessaires pour voir pour la première fois toutes les boules de l'urne.

Pour cela pour tout entier naturel non nul n on note :

- E_n l'événement "on voit pour la première fois toutes les boules de l'urne au n ième tirage "
- F_n l'événement " une au moins des boules n'a toujours pas été obtenue au bout de n tirages".

Ainsi si les tirages donnent successivement : AABABBAC l'événement E_8 est réalisé et les événements $F_1, F_2, \dots, F_7$ sont réalisés.

On note également A_n (respectivement B_n, C_n) l'événement : " la boule A (respectivement la boule B , la boule C) n'a pas été obtenue au cours des n tirages", $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer les probabilités suivantes :

$$P(A_n) \quad , \quad P(A_n \cap B_n) \quad , \quad P(A_n \cap B_n \cap C_n)$$

2. Exprimer l'événement F_n en fonction des événements A_n, B_n, C_n .

3. Prouver que pour tout $n \geq 2 : P(F_n) = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
4. (a) Justifier que pour tout $n \geq 3 \quad E_n = F_{n-1} \setminus F_n$.
- (b) En déduire que pour tout $n \geq 3 : P(E_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

6) Une compagnie aérienne étudie la réservation sur l'un de ses vols.

On considère qu'une place donnée peut être dans deux états réservée ou libre. La place est libre le jour d'ouverture de la réservation et son état évolue chaque jour jusqu'à la fermeture de la réservation de la manière suivante

- Si la place est réservée le jour k , elle le sera encore le jour $k + 1$ avec la probabilité 0,9 (pour tenir compte des annulations éventuelles).
- Si la place est libre le jour k , elle sera réservée le jour $k + 1$ avec la probabilité 0,4.

Pour k entier positif, on note R_k l'événement "la place est réservée le jour k " et $r_k = P(R_k)$.

1. (a) Quelle est la valeur de r_1 ?
- (b) A l'aide de la formule des probabilités totales montrer que pour tout $k \geq 1$:

$$r_{k+1} = 0.5r_k + 0.4$$

Quelle est la nature de la suite (r_k) ?

2. En déduire l'expression explicite de r_k en fonction de k .

7) Un commerçant dispose d'un stock de plantes. Chacune des plantes fleurit une fois par an.

Pour chaque plante, la première année, la probabilité de donner une fleur rose vaut $\frac{3}{4}$, la probabilité de donner une fleur blanche vaut $\frac{1}{4}$.

Puis les années suivantes, pour tout entier naturel n non nul :

- si l'année n , la plante a donné une fleur rose, alors l'année $n + 1$ elle donnera une fleur rose.
- si l'année n la plante a donné une fleur blanche, alors elle donnera l'année $n + 1$ de façon équiprobable une fleur rose ou une fleur blanche.

n désigne un entier naturel non nul. Pour une plante donnée, on note p_n , la probabilité de l'événement R_n «la plante donne une fleur rose la n ème année»

1. Donner la valeur de p_1
2. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que la suite $(p_n)_{n \geq 1}$ vérifie :

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}$$

3. Pour tout $n \geq 1$ on pose $x_n = p_n - 1$.

Montrer que (x_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

4. En déduire l'expression de x_n puis de p_n en fonction de n .
- 5.

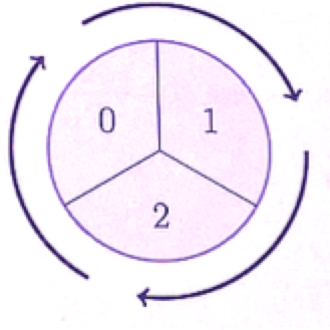
- (a) Quelle est la probabilité pour que la plante ne donne que des fleurs roses pendant les n premières années ?
- (b) Quelle est la probabilité pour que la plante ne donne que des fleurs blanches pendant les n premières années ?

8)

On suppose qu'un joueur déplace un pion sur les trois cases d'une roue de loterie partagée en tiers numérotés 0,1 et 2 , dans le sens des aiguilles d'une montre (c'est-à-dire dans le sens de la flèche indiquée), selon le protocole suivant :

- * au début du jeu, le pion est sur la case 0 ;
- * à chaque coup le joueur tire de façon équiprobable un chiffre k de l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$ et avance son pion de k cases, en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre.

Ainsi, par exemple, s'il tire le chiffre 3, il avance son pion de 3 cases ; s'il tire le chiffre 0 , il reste sur place.



On note, pour tout entier naturel n , les événements :

- A_n : " à l'issue du $n^{\text{ième}}$ coup, le pion est sur la case 0 ",
- B_n : " à l'issue du $n^{\text{ième}}$ coup, le pion est sur la case 1 ",
- C_n : " à l'issue du $n^{\text{ième}}$ coup, le pion est sur la case 2 ".

et on note $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

On convient que A_0 est l'événement certain et que B_0 et C_0 sont des événements impossibles.

1. Donner les valeurs des probabilités $P(A_0)$, $P(B_0)$, $P(C_0)$ puis de $P(A_1)$, $P(B_1)$ et $P(C_1)$.
2. Justifier que (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements.
Que vaut alors la somme $a_n + b_n + c_n$?
3. Expliquer pourquoi $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$. Donner en les justifiants les valeurs de $P_{B_n}(A_{n+1})$ et $P_{C_n}(A_{n+1})$.
4. Donner également probabilités conditionnelles :

$$P_{A_n}(B_{n+1}), P_{B_n}(B_{n+1}), P_{C_n}(B_{n+1})$$

$$P_{A_n}(C_{n+1}), P_{B_n}(C_{n+1}), P_{C_n}(C_{n+1})$$

5. A l'aide de la formule des probabilités totales montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{cases}$$

6. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = c_n$

7. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}$

(b) Quelle est la nature de la suite (a_n) ?

Montrer que pour tout entier naturel n $a_n = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{4^n} \right)$

8. Justifier enfin que pour tout entier naturel n , $b_n = c_n = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right)$.

9) Une entreprise de restauration collective propose trois formules de repas à n clients, où n est un entier naturel non nul.

Chacun des clients choisit exactement **une** de ces trois formules au hasard et de façon équiprobable puis envoie un bon de commande à l'entreprise. L'entreprise réceptionne alors pour chacun de ses n clients son bon de commande et lui livre la formule choisie.

On suppose que les choix de formule des clients sont mutuellement indépendants.

Pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$, on note :

- A_k l'événement : "après réception du $k^{\text{ième}}$ bon, une seule formule a été choisie" ;
- B_k l'événement : "après réception du $k^{\text{ième}}$ bon, exactement deux formules ont été choisies" ;
- C_k l'événement : "après réception du $k^{\text{ième}}$ bon, les trois formules ont été choisies".

Enfin, on pose pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$: $a_k = P(A_k)$, $b_k = P(B_k)$ et $c_k = P(C_k)$.

Le tableau ci-dessus donne un exemple de choix de formule pour les cinq premiers bons reçus :

	1 ^{er} bon	2 ^e bon	3 ^e bon	4 ^e bon	5 ^e bon
numéro de la formule choisie	n° 2	n° 1	n° 2	n° 1	n° 3

Dans ce cas, B_2 est réalisé, C_4 n'est pas réalisé mais C_5 l'est.

1. (a) Préciser les nombres a_1, b_1 et c_1 .

(b) Justifier les égalités : $a_2 = \frac{1}{3}, b_2 = \frac{2}{3}, c_2 = 0$.

(c) Montrer que (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements.

(d) Que vaut la somme $a_n + b_n + c_n$?

(e) Pour tout entier naturel k non nul, donner les valeurs de $P_{A_k}(A_{k+1}), P_{B_k}(A_{k+1}), P_{C_k}(A_{k+1}), P_{A_k}(B_{k+1}), P_{B_k}(B_{k+1}), P_{C_k}(B_{k+1}), P_{A_k}(C_{k+1}), P_{B_k}(C_{k+1}), P_{C_k}(C_{k+1})$.

Un argumentaire est attendu pour expliquer les valeurs de chacune de ces probabilités.

2. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que :

$$\forall n \geq 1, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n \\ b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n, \\ c_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + c_n. \end{cases}$$

3. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $P(A_n) = \frac{1}{3^{n-1}}$.

4. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $P(B_n) = \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}$

5. En déduire l'expression que $n \in \mathbb{N}^*$ $P(C_n) = 1 - \frac{2^n - 1}{3^{n-1}}$.

6. On considère le script **Python** suivant :

```
1. n = 1
2. c = 1-(2**n-1)/3**(n-1)
3. while c < 0.95 :
4.     n = n + 1
5.     c = 1-(2**n-1)/3**(n-1)
6. print(n)
```

Après exécution, on obtient l'affichage suivant : 11.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

10) Dans cet exercice on suppose que l'on dispose de deux urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$.

L'urne $\mathcal{U}_1$ contient 4 boules rouges tandis que l'urne $\mathcal{U}_2$ contient deux boules rouges et deux boules blanches.

Partie 1

On commence par lancer une pièce qui amène pile avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et face avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

Si on obtient "pile" on choisit de faire une succession de tirages dans l'urne $\mathcal{U}_1$. Dans le cas contraire on choisit de faire les tirages dans l'urne $\mathcal{U}_2$.

On note F l'événement "la pièce amène face". l'événement "la pièce amène pile" est donc $\overline{F}$. on définit également pour tout entier $k \geq 1$ l'événement R_k : "le k -ième tirage dans l'urne choisie amène une boule rouge".

1. On lance la pièce, on choisit l'urne puis on effectue un tirage.

Déterminer en utilisant la formule des probabilités totales la probabilité de tirer une boule rouge.

2. On lance la pièce, on choisit l'urne puis on effectue deux tirages sans remise. C'est-à-dire que la boule tirée lors du premier tirage n'est pas remise dans l'urne avant de procéder au deuxième tirage dans la même urne.

(a) Calculer $P_{\overline{F}}(R_1 \cap R_2)$ et $P_F(R_1 \cap R_2)$.

En déduire que la probabilité que le tirage amène deux boules rouges de suite est $\frac{4}{9}$.

- (b) On remarque à posteriori que les deux boules tirées sont rouges. Quelle est la probabilité que la pièce ait amené pile ?

Partie 2

On choisit désormais une urne au hasard sans savoir laquelle puis on décide de faire des tirages sans remise dans l'urne choisie jusqu'à ce que l'on soit en mesure de déterminer avec certitude dans quelle urne l'on se trouve.

On note désormais U_1 l'événement les tirages s'effectuent dans l'urne $\mathcal{U}_1$ et U_2 l'événement les tirages s'effectuent dans l'urne $\mathcal{U}_2$

1. Montrer qu'on a désormais $P(R_1) = \frac{3}{4}$.

2. Justifier qu'il faut au maximum 3 tirages pour savoir avec certitude dans quelle urne l'on se trouve.
On note E_1 (respectivement E_2 et E_3) l'événement "on sait avec certitude dans quelle urne on se trouve après le premier tirage" (respectivement le deuxième, le troisième).
3. Expliquer pourquoi $E_1 = B_1$. En déduire $P(E_1)$.
4. Justifier que $E_2 = U_2 \cap R_1 \cap B_2$. En déduire que $P(E_2) = \frac{1}{6}$.
5. Justifier que (E_1, E_2, E_3) est un système complet d'événements..
6. En déduire $P(E_3)$.

11)

1. On considère trois événements A, B, C tels que $P(B) \neq 0, P(B) \neq 1, P(C) \neq 0$ et $P(B \cap C) \neq 0$. Démontrer la formule suivante :

$$P_C(A) = P_{B \cap C}(A)P_C(B) + P_{\overline{B \cap C}}(A)P_C(\overline{B})$$

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse à l'expérience aléatoire suivante : on lance indéfiniment une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$, et Face avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

On admet que les résultats des différents lancers sont indépendants.

Pour tout entier naturel k non nul, on note F_k l'événement : "on obtient Face à l'issue du k -ième lancer".

$\overline{F_k}$ est donc l'événement : "on obtient Pile à l'issue du k -ième lancer."

On considère l'événement E : "2 Faces consécutifs apparaissent avant l'apparition éventuelle de 2 Piles consécutifs".

Par exemple :

- si les résultats des six premiers lancers sont $F_1 \overline{F_2} F_3 \overline{F_4} F_5 F_6$, alors E est réalisé
- si les résultats des six premiers lancers sont $\overline{F_1} F_2 F_3 \overline{F_4} \overline{F_5} F_6$, alors E est réalisé
- si les résultats des six premiers lancers sont $F_1 \overline{F_2} F_3 \overline{F_4} \overline{F_5} F_6$, alors $\overline{E}$ est réalisé.

2. (a) Donner sans calcul la valeur de $P_{F_1 \cap F_2}(E)$.
(b) Justifier également sans calculs la relation suivante : $P_{F_1 \cap \overline{F_2}}(E) = P_{\overline{F_1}}(E)$.
(c) En utilisant la relation trouvée à la question 1(b), avec $A = E, B = F_2$ et $C = F_1$, trouver une relation entre $P_{F_1}(E)$ et $P_{\overline{F_1}}(E)$.
3. (a) Que vaut $P_{\overline{F_1} \cap \overline{F_2}}(E)$?
(b) Montrer que $P_{\overline{F_1} \cap F_2}(E) = P_{F_1}(E)$.
(c) Toujours en utilisant la relation de la question 1(b) appliquée à des événements bien choisis, montrer que $P_{\overline{F_1}}(E) = \frac{1}{3}P_{F_1}(E)$.
4. (a) Déduire des questions 2 et 3 les égalités : $P_{F_1}(E) = \frac{3}{7}$ et $P_{\overline{F_1}}(E) = \frac{1}{7}$.
(b) Calculer $P(E)$.