

Variables aléatoires finies

1 Variables aléatoires finies

1.1 Définition d'une variable aléatoire-exemples

Soit E une expérience aléatoire et Ω l'univers des résultats possibles associés à E .

Il est parfois intéressant d'associer à chaque possible $\omega \in \Omega$ un nombre réel, par exemple le nombre de fois où l'on a obtenu Pile lors d'une série de 10 lancers d'une pièce de monnaie.

On est donc amené à étudier les applications X de Ω dans $\mathbb{R}$.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini.

- On appelle variable aléatoire réelle (v.a.r) toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$.
- On pose $X(\Omega) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ l'ensemble des valeurs prises par X .
- Si $X(\Omega)$ est un ensemble fini, on dit que X est une v.a.r discrète finie.

Remarque :

- Justifions la terminologie "variable aléatoire" :
le réel $X(\omega)$ va être variable, car il prendra en général des valeurs différentes selon les résultats possibles ω de l'expérience aléatoire, et aléatoire car la réalisation d'un possible ω dépend du hasard.
- Le formalisme des variables aléatoires trouve également sa justification dans le fait que l'on peut faire sur les réels des opérations algébriques telles que additions, multiplications,..., que l'on sait prendre l'image $f(x)$ d'un réel x par une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou calculer une moyenne.
Ces manipulations sont difficiles ou impossibles avec les événements liés à l'expérience aléatoire.

Exemple 1 :

On choisit au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes. Ω est l'ensemble des 52 cartes.

A chaque carte $\omega \in \Omega$ on associe le réel $X(\omega)$ défini par :

- $X(\omega) = 4$ si ω est un as,
- $X(\omega) = 3$ si ω est un roi,
- $X(\omega) = 2$ si ω est une dame,
- $X(\omega) = 1$ si ω est un valet,
- $X(\omega) = 0$ dans tous les autres cas.

On définit une v.a.r discrète finie sur Ω . X prend les valeurs 0, 1, 2, 3, 4 donc $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Exemple 2 :

Considérons un dé honnête que l'on lance.

On peut définir $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ par $X(\omega) = 1$ si le numéro qui sort est pair et $X(\omega) = 0$ s'il est impair.

X est une v.a.r sur $\Omega = \llbracket 1; 6 \rrbracket$ et $X(\Omega) = \{0, 1\}$.

Exemple 3 :

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.

On gagne deux euros pour chaque résultat Pile et on perd 1 euro pour chaque résultat Face.

$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$$

L'application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ qui à chaque issue associe le gain correspondant prend les valeurs $-3, 0, 3, 6$.

X est une v.a.r finie sur Ω et $X(\Omega) = \{-3, 0, 3, 6\}$.

Exemple 4 :

On effectue une série de n lancers à pile ou face avec une pièce de monnaie.

On définit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ où $X(\omega)$ est égal au nombre de fois où l'on obtient pile au cours des n lancers.

X est une v.a.r finie sur Ω et $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$.

Exemple 5 :

On dispose d'une urne contenant 30 boules numérotées de 1 à 30. On tire 10 boules successivement sans remise et on note les numéros tirés.

$\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_{10}) \text{ avec pour } i \neq j \quad x_i \neq x_j \text{ et pour tout } i \in \llbracket 1; 10 \rrbracket \quad 1 \leq x_i \leq 30\}$.

Soit X l'application qui à tout élément de Ω associe le plus grand des numéros du 10-uplet (soit le plus grand des numéros obtenus).

X est une v.a.r finie sur Ω et $X(\Omega) = \llbracket 10; 30 \rrbracket$.

1.2 Événements liés à une variable aléatoire

Proposition et notation :

Soit X une v.a.r définie sur Ω .

- Soient a et b deux réels ($a < b$).
 1. $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\}$ est un événement noté $[X = a]$,
 2. $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > a\}$ est un événement noté $[X > a]$,
 3. $\{\omega \in \Omega \mid a < X(\omega) \leq b\}$ est un événement noté $[a < X \leq b]$,
 4. $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq b\}$ est un événement noté $[X \leq b]$.
- Plus généralement pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$
 $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\}$ est un événement lié à l'expérience aléatoire.

Exemples :

1. On reprend l'exemple 1 :

- $[X = 4]$ est réalisé si on a obtenu un as,
- $[X \geq 1]$ est réalisé si on a obtenu une figure ou un as.
- $[X \leq 0]$ est réalisé si on a obtenu un 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10,
- $[X < 0]$ est l'événement impossible et $[X < 5]$ est l'événement certain.

2. On reprend l'exemple 2 :

- $[X \geq 0] = \Omega$; $[X < 2] = \Omega$ et $[X \geq 3] = \emptyset$,
- $[0 \leq X < 1] = [X = 0]$.

3. On reprend l'exemple 3 :

- $[X = 3] = \{FPP, PPF, PFP\}$,
- $[1 < X < 4] = [X = 3]$,
- $[X \geq 5] = [X = 6] = \{PPP\}$.

4. On reprend l'exemple 4.

Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $[X = k]$ est l'événement "on obtient k fois pile au cours des n lancers".

5. On reprend l'exemple 5 :

- $[X \leq 9] = \emptyset$,
- $[X = 10] = \{\text{permutations de } \llbracket 1; 10 \rrbracket\}$

2 Loi et fonction de répartition d'une v.a.r. discrète

2.1 Loi de probabilité d'une v.a.r. discrète finie

Proposition

Soit Ω un univers et X une v.a.r finie sur Ω . On pose $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ Alors

$$([X = x_1], [X = x_2], \dots, [X = x_n])$$

est un système complet d'événements appelé système complet associé à la variable X .

N'importe quel évènement lié à la v.a.r X s'écrit comme réunion des évènements précédents donc il suffit de connaître les probabilités $P([X = x_i])$ pour pouvoir déterminer la probabilité de n'importe quel évènement lié à X .

On définit la loi de la variable X :

Définition

On appelle loi de probabilité de la v.a.r X l'ensemble des couples $((x_i, p_i))_{1 \leq i \leq n}$ où

$$\begin{cases} x_i \in X(\Omega) \\ p_i = P([X = x_i]) \end{cases}$$

Remarques :

- Pour alléger les notations $P([X = x_i])$ sera souvent noté $P(X = x_i)$.
- En pratique, pour déterminer la loi de X , on détermine les valeurs x_i susceptibles d'être prises par X , puis les probabilités $p_i = P([X = x_i])$.
- Si $I = \llbracket 1; n \rrbracket$ avec n petit, on représente souvent les résultats dans un tableau.

Exemple :

On reprend l'exemple 1 : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Il y a dans le jeu 36 cartes qui ne sont ni des figures ni des as, 4 figures de chaque sorte ainsi que 4 as.

$$P(X = 0) = \frac{36}{52} = \frac{9}{13}$$

$$\text{et pour } i \in \llbracket 1; 4 \rrbracket, P(X = i) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

D'où la loi de X :

x_i	0	1	2	3	4
$p_i = P(X = x_i)$	$\frac{9}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$

La probabilité d'avoir une figure (valet ou dame ou roi) est donc :

$$P(1 \leq X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{3}{13}$$

Exercice 1 :

Reprendre les exemples 2 et 3 et déterminer pour chacun d'entre eux la loi de la v.a.r X .

Exercice 2 :

Une urne contient 4 boules noires et 6 boules blanches.

On effectue dans cette urne 3 tirages successifs avec remise.

On note alors X le nombre de boules blanches obtenues.

Donner la loi de la v.a.r. X .

Proposition

1. Soit X une v.a.r finie sur Ω .

On pose $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $p_i = P(X = x_i)$. Alors

- pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $p_i \geq 0$

- $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

(La somme des coefficients d'une loi de probabilité vaut 1).

2. Réciproquement si $\{x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n\}$ sont $2n$ réels tels que $(p_1, \dots, p_n)$ vérifiant les deux conditions ci dessus

alors $\{(x_i, p_i)_{1 \leq i \leq n}\}$ est la loi de probabilité d'une v.a.r.

Démonstration :

- $p_i = P([X = x_i])$ donc il est clair que $p_i \geq 0$.
- $([X = x_1], [X = x_2], \dots, [X = x_n])$ est un système complet d'événements donc

$$\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n P([X = x_i]) = 1.$$

Exemple :

Les coefficients suivants :

x_i	0	1	2	3	4	5
$p_i = P(X = x_i)$	$\frac{32}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{1}{243}$

sont positifs et leur somme est égale à 1.

On définit bien la loi de probabilité d'une v.a.r X .

Remarque :

Représentation graphique d'une loi, diagramme en bâton.

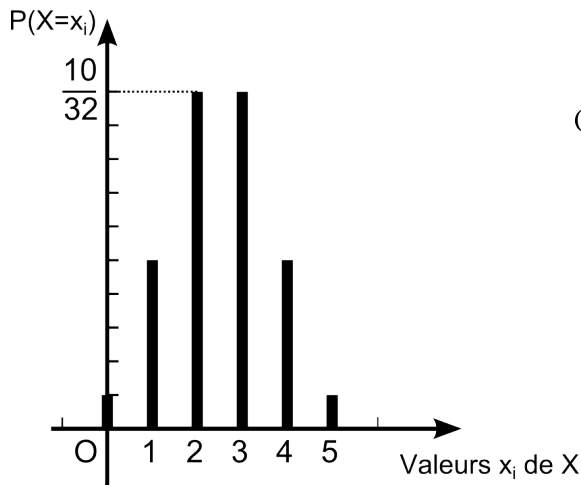
Soit X une var définie sur Ω . On pose $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

Rapportons le plan à un repère orthonormé.

On peut représenter les coefficients $p_i = P(X = x_i)$ de la loi de X par des bâtons centrés sur les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ et de hauteur proportionnelle respectivement à $p_1, p_2, \dots, p_n$.

La somme des hauteurs des bâtons vaut donc 1.

Exemple :



On considère la loi suivante

x_i	0	1	2	3	4	5
$p_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

2.2 Fonction de répartition d'une v.a.r

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r finie sur Ω .
On appelle fonction de répartition de X l'application :

$$F : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & F(x) = P(X \leq x) \end{pmatrix}$$

Exemple :

On reprend l'exemple 1

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. On pose pour $0 \leq i \leq 4$ $p_i = P(X = i)$.

Soit F la fonction de répartition de X .

- Si $x \in]-\infty, 0[$ $(X \leq x) = \emptyset$
Si $x < 0$, l'évènement $(X \leq x)$ est impossible car la plus petite valeur prise par X est 0.

$$F(x) = P(X \leq x) = 0$$

- Si $x \in [0, 1[$ $[X \leq x] = [X = 0]$
la seule valeur prise par X dans l'intervalle $] -\infty, x]$ est 0.

$$F(x) = P(X \leq x) = P(X = 0) = \frac{9}{13} = p_0$$

- Si $x \in [1, 2[$ $[X \leq x] = [X = 0] \cup [X = 1]$ donc

$$F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = p_0 + p_1 = \frac{9}{13} + \frac{1}{13} = \frac{10}{13}$$

- Si $x \in [2, 3[$ $[X \leq x] = [X = 0] \cup [X = 1] \cup [X = 2]$ donc

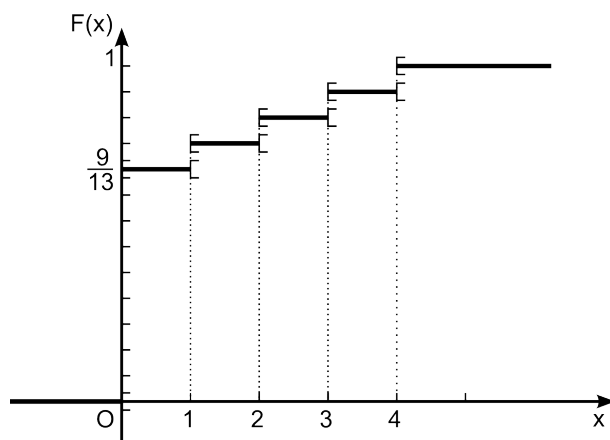
$$F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = p_0 + p_1 + p_2 = \frac{9}{13} + \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{11}{13}$$

- Si $x \in [3, 4[$ $F(x) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = \frac{12}{13}$.

- Si $x \geq 4$ l'évènement $[X \leq x]$ est certain car la plus grande valeur prise par X est 4 donc

$$F(x) = P(X \leq x) = 1$$

La courbe représentative de F est :



Remarque :

Si X est une v.a.r telle $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

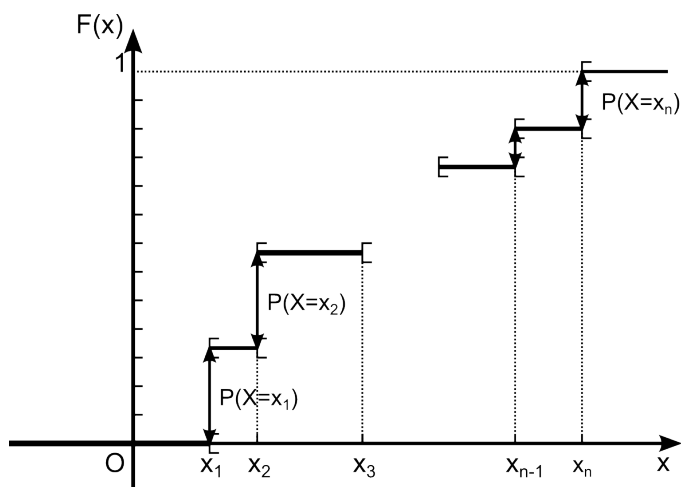
On pose et pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ $p_i = P(X = x_i)$.

la fonction de répartition F de X est définie par

sur $] -\infty; x_1[$ $F(x) = 0$

$\forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, sur $[x_k, x_{k+1}[$ $F(x) = P\left(\bigcup_{i=1}^k [X = x_i]\right) = p_1 + p_2 + \dots + p_k$.

sur $[x_n, +\infty[$ $F(x) = 1$.



$P(X = x_i)$ est égal au saut de la fonction de répartition en x_i

Exercice 3 :

Tracer la fonction de répartition de la variable définie à l'exemple 3.

Proposition

Soit X une v.a.r finie de fonction de répartition F .

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) \in [0, 1]$,
2. F est croissante,
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$,
4. pour tous réels a et b $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.

Exemple :

On reprend l'exemple 1.

$$P(0 < X \leq 3) = F(3) - F(0) = \frac{12}{13} - \frac{9}{13} = \frac{3}{13}$$

Remarque :

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$.

Pour tous entiers p et q de $\llbracket 0; n \rrbracket$ avec $p < q$ on a :

- $P(X \leq q) = F(q)$
- $P(X > p) = 1 - F(p)$
- $P(X \geq p) = 1 - F(p - 1)$
- $P(p < X \leq q) = F(q) - F(p)$
- $P(p \leq X \leq q) = F(q) - F(p - 1)$

2.3 Lien entre la loi et la fonction de répartition

Il ressort de ce qui précède que la loi d'une v.a.r. définit la fonction de répartition et réciproquement.

Proposition

Soit X une v.a.r finie sur Ω de fonction de répartition F .

On pose $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

La fonction de répartition F de X permet de déterminer la loi de X :

pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$ en posant $F(x_0) = 0$.

Démonstration :

Si $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ $[X = x_i] = [x_{i-1} < X \leq x_i]$ d'où

$$P(X = x_i) = P(x_{i-1} < X \leq x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

Remarque :

En particulier si X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$.

Pour tous entiers k de $\llbracket 0; n \rrbracket$ on a :

$$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1) = F(k) - F(k - 1)$$

Il est parfois plus simple de déterminer la loi d'une v.a.r à partir de sa fonction de répartition.

Exercice 4 :

Un sac contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On tire trois boules avec remise.

On note X le plus grand des deux numéros obtenus.

1. Pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ déterminer $P(X \leq k)$.
2. En déduire la loi de probabilité de X .

3 Espérance d'une v.a.r

Définition

Soit X une v.a.r finie définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

Posons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

On appelle espérance de X le réel

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i).$$

Remarques :

- L'espérance est la moyenne des valeurs prises par X pondérée par la probabilité que X prenne cette valeur.

$E(X)$ est aussi appelée valeur moyenne de X .

- Dans le cas particulier courant où $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ l'espérance s'écrit :

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k P(X = k)$$

Exemples :

1. Soit X une v.a.r de loi

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$

$$E(X) = 0 \times \frac{9}{13} + 1 \times \frac{1}{13} + 2 \times \frac{1}{13} + 3 \times \frac{1}{13} + 4 \times \frac{1}{13} = \frac{10}{13}$$

2. Soit A un événements et X la variable aléatoire qui vaut 1 si A est réalisé, 0 sinon. On a alors :

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1 - P(A)$	$P(A)$

d'où

$$E(X) = 0 \times (1 - P(A)) + 1 \times P(A) = P(A)$$

3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et X la v.a.r certaine égale à a . (ie pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = a$).
 $X(\Omega) = \{a\}$ et $P(X = a) = 1$ donc

$$E(X) = a \times P(X = a) = a$$

Exercice 5 :

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.

On gagne deux euros pour chaque résultat Pile et on perd 1 euros pour chaque résultat Face. Soit G la v.a.r. égale au gain du joueur.

Déterminer le gain moyen.

Exercice 6 :

Un sac contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On tire trois boules avec remise.

On note X le plus grand des deux numéros obtenus.

Déterminer l'espérance de X .

Exercice 7 :

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n .

On tire une boule dans cette urne et on note X le numéro obtenu.

1. Déterminer la loi de X .
2. Déterminer la valeur moyenne de X .

Proposition

Soit X une v.a.r définie sur Ω .

On pose $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

1. Si pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $a \leq x_i \leq b$ alors

$$a \leq E(X) \leq b$$

2. En particulier si X est positive (ie pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ $x_i \geq 0$) alors

$$E(X) \geq 0$$

Démonstration :

1. Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ on a $a \leq x_i \leq b$.

$P(X = x_i) \geq 0$ donc

$$aP(X = x_i) \leq x_i P(X = x_i) \leq bP(X = x_i)$$

Sommons les inégalités précédentes pour i variant de 1 à n :

$$\sum_{i=1}^n aP(X = x_i) \leq \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) \leq \sum_{i=1}^n bP(X = x_i)$$

$$a \underbrace{\sum_{i=1}^n P(X = x_i)}_1 \leq E(X) \leq b \underbrace{\sum_{i=1}^n P(X = x_i)}_1$$

2. Il suffit de prendre $a = 0$.

4 Variable aléatoire discrète définie comme fonction d'une autre variable aléatoire discrète

4.1 Loi d'une v.a.r. du type $f(X)$

Exemple :

On considère une urne contenant 4 boules rouges et 5 boules noires.

Un joueur effectue dans cette urne une série de 10 tirages avec remise de la boule tirée .

On note X le nombre de boules rouges obtenues à l'issue des 10 tirages.

On décide d'attribuer 3 points par boule rouge obtenue et d'enlever 1 point par boule noire obtenue.

On considère alors la v.a.r. Y égale au nombre de points obtenus par le joueur.

On a alors

$$Y = 3X - (10 - X) = 4X - 10$$

Soit X une v.a.r discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{T})$ et soit f une fonction

On cherche alors à déterminer la loi de $f(X)$ à partir de la loi de X .

Exemple :

Soit X une v.a.r dont la loi est définie par

x_i	-2	-1	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,15	0,23	0,35	0,09	0,18

On pose $Y = X^2$.

Cherchons la loi de Y :

•

$$Y(\Omega) = \{(-2)^2, (-1)^2, 0^2, 1^2, 2^2\} = \{0, 1, 4\}$$

- $(Y = 0) = (X = 0)$ donc

$$P(Y = 0) = P(X = 0) = 0.35$$

- $(Y = 1) = (X = -1) \cup (X = 1)$

Les événements $(X = -1)$ et $(X = 1)$ sont incompatibles donc

$$P(Y = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = 0.23 + 0.09 = 0.32$$

- $(Y = 4) = (X = -2) \cup (X = 2)$

$$P(Y = 4) = P(X = -2) + P(X = 2) = 0.15 + 0.18 = 0.33$$

- On donne la loi de Y sous forme d'un tableau :

y_i	0	1	4
$P(Y = y_i)$	0.35	0.32	0.33

On peut alors énoncer le cas général :

Proposition

1. Soit X une v.a.r finie d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et soit f une application définie sur $X(\Omega)$ à valeur dans $\mathbb{R}$.

L'application

$$\begin{pmatrix} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & f(X(\omega)) \end{pmatrix}$$

est une v.a.r finie noté $Y = f(X)$.

2. Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$$Y(\Omega) = \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$$

(valeurs non nécessairement deux à deux distinctes.)

3. Pour tout $y \in Y(\Omega)$

$$P(Y = y) = \sum_{f(x_k)=y} P(X = x_k)$$

(la somme précédente est étendue à toutes les valeurs x_k prises par X telles que $f(x_k) = y$)

Remarque

$P(Y = y)$ est donc la somme des probabilités $P(X = x_i)$ pour les réels dont l'image par f vaut y .

Exercice 8 :

Soit X une v.a.r dont la loi est définie par

x_i	-2	-1	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,12	0,15	0,45	0,2	0,08

Déterminer les lois de $Y = 2X + 1$ et de $Z = X^3 - X$.

4.2 Espérance d'une fonction d'une v.a.r

Théorème de transfert

Soit X une v.a.r finie définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et f une fonction définie sur $X(\Omega)$.

On pose $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

La v.a.r $Y = f(X)$ admet une espérance et

$$E(Y) = \sum_{i=1}^n f(x_i)P(X = x_i).$$

Remarques :

- Le calcul de $E(Y)$ ne nécessite pas la connaissance de la loi de Y mais uniquement celle de X .
- Cas particulier important où $f(x) = x^2$:

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 P(X = x_i)$$

Si de plus $X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$.

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^n k^2 P(X = k)$$

Exercice 9 :

On reprend la v.a.r X de loi

x_i	-2	-1	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,15	0,23	0,35	0,09	0,18

1. Déterminer $E(X)$; $E(X^2)$ et $E(2X + 1)$.
2. Déterminer la loi de $Y = X^2$ et retrouver la loi de $E(X^2)$ à partir de la loi de Y .

Exercice 10 :

On considère un dé cubique truqué de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numéro k soit égale à ak . On suppose les faces numérotées de 1 à 6.

Soit X la v.a.r égale au numéro obtenu.

1. Déterminer a , la loi de X puis de $E(X)$.

On rappelle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. On pose $Y = \frac{1}{X}$. Déterminer $E(Y)$.

Proposition

Soit X une v.a.r finie.
Pour tous réels a et b

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Démonstration :

Posons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = ax + b$ et $Y = f(X) = aX + b$.

Y admet une espérance et

$$E(Y) = E(aX + b) = \sum_{i=1}^n f(x_i)P(X = x_i) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b)P(X = x_i) = a \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)}_{=E(X)} + b \underbrace{\sum_{i=1}^n P(X = x_i)}_{=1}$$

On a bien $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Exercice 11 :

Retrouver la valeur de $E(2X + 1)$ dans l'exemple 1 précédent.

Exercice 12 :

Soit X une v.a.r finie.

Quelle est l'espérance de $Y = X - E(X)$?

5 Variance, écart-type d'une variable aléatoire.

Définition

Soit X une v.a.r finie.

- On appelle variance de X le réel

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

- On appelle écart-type de la v.a.r X le réel

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarques :

- Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ on a

$$V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$$

- Comme $(X - E(X))^2 \geq 0$, $V(X) \geq 0$ et l'écart-type est bien défini.
- La variance est la moyenne du carré de la distance entre les valeurs de X et la moyenne de X .
La variance mesure donc la dispersion de X par rapport à $E(X)$.
Plus $V(X)$ est grande, plus X est dispersée par rapport à son espérance.
Plus $V(X)$ est proche de 0, plus X prend des valeurs proches de l'espérance.

Exemples :

1. On considère un lancer de deux dés équilibrés de couleurs différentes.
Soit X la v.a.r égale à la somme des chiffres obtenus. On a

x_i	2	3	4	4	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

$$E(X) = \sum_{i=2}^{12} iP(X=i) = 7 \quad \text{et} \quad V(X) = \sum_{i=2}^{12} (i-7)^2 P(X=i) = \frac{35}{6}$$

2. Soit X une v.a.r certaine égale à a .

On a alors $X(\Omega) = \{a\}$.

Donc $E(X) = a$ et $X - E(X) = 0$ donc $V(X) = 0$.

Proposition

Soit X une v.a.r finie.

1. $V(X) \geq 0$.

2. Pour tous réels a et b ,

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

3. Formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Démonstration :

1. Comme $(X - E(X))^2 \geq 0$ la positivité de l'espérance implique $E((X - E(X))^2) \geq 0$ soit $V(X) \geq 0$.

2.

$$[aX + b - E(aX + b)]^2 = [aX + b - aE(X) - b]^2 = a^2(X - E(X))^2$$

d'où

$$V(aX + b) = E(a^2(X - E(X))^2) = a^2 E((X - E(X))^2) = a^2 V(X)$$

3.

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2E(X)X + (E(X))^2) \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2 \\ &= E(X^2) - (E(X))^2. \end{aligned}$$

Exercice 13 :

On reprend X de loi

x_i	-2	-1	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,15	0,23	0,35	0,09	0,18

Calculer $V(X)$ et $V(2X + 1)$.

Exercice 14 :

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.

On gagne deux euros pour chaque résultat Pile et on perd 1 euro pour chaque résultat Face. Soit G la v.a.r. égale au gain du joueur. Déterminer la variance de G .

6 Coefficients binomiaux

6.1 Factorielle, permutations

Définition

Soit n un entier naturel non nul.

On appelle factorielle n l'entier noté $n!$ et défini par :

$$n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 2 \times 1$$

Exemples

1.

$$1! = 1 \quad 2! = 2 \times 1 = 2 \quad 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6 \quad 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

2. Par convention $0! = 1$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$(n+1)! = (n+1) \times n \times \dots \times 2 \times 1 = (n+1) \times [n \times \dots \times 2 \times 1] = (n+1) \times n!$$

Définition

Soit E un ensemble à n éléments.

On appelle permutation de E toute liste de n éléments de E deux à deux distincts.

Remarque

Dans une permutation, chaque élément de E apparaît une et une seule fois.

Une permutation est donc une manière de classer dans un certain ordre les éléments de E .

Exemple

Soit

$$E = \{1, 2, 3\}$$

Les permutations de E sont :

$$(1, 2, 3) \quad (1, 3, 2) \quad (2, 1, 3) \quad (2, 3, 1) \quad (3, 1, 2) \quad (3, 2, 1)$$

Il y a donc 6 permutations de E .

Proposition

Le nombre de permutation d'un ensemble à n éléments est égal à $n!$

Démonstration

Soit E un ensemble à n éléments. Une permutation de E est une liste ordonnée, sans répétition, contenant les n éléments de E .

On a n possibilités pour choisir le premier élément de cette liste.

On a ensuite $(n-1)$ choix possibles pour le deuxième élément qui doit être différent du premier.

Puis $(n-2)$ choix possibles pour le troisième élément qui doit être différent des deux premiers.

Enfin il ne reste qu'une seule possibilité pour le dernier élément de la liste.

Au total on peut construire

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1 = n!$$

permutations différentes.

6.2 Coefficients binomiaux

Définition

Soit E un ensemble fini de n éléments et k un entier vérifiant $0 \leq k \leq n$.

On appelle combinaison de k éléments de E toute partie de E à k éléments.

On note $\binom{n}{k}$ le nombre de combinaisons de k élément de E ie le nombre de parties de E à k éléments.

$\binom{n}{k}$ se lit " k parmi n ".

Remarques

- Dans une combinaison, l'ordre ne compte pas et il n'y a pas de répétition possible.
- Dans le modèle de tirages de boules dans une urne, une telle combinaison correspond au tirage **simultané** de k boules dans une urne contenant n boules distinctes.
- Lorsque $k > n$ on pose $\binom{n}{k} = 0$.
Il n'y a pas de partie de cardinal k dans un ensemble de cardinal strictement inférieur à k .
- Si E est un ensemble à n éléments :
 - il y a une seule partie de E à 0 éléments, c'est la partie vide donc

$$\binom{n}{0} = 1$$

— il y a n parties de E à 1 élément donc

$$\binom{n}{1} = n$$

— il y a une seule partie de E à n éléments, c'est l'ensemble E lui-même, donc

$$\binom{n}{n} = 1$$

Exemples

1. Au loto on doit choisir 6 numéros parmi 29.
On doit donc choisir une partie à 6 éléments parmi les 29 numéros possibles.
On peut donc construire $\binom{29}{6}$ grilles différentes.
2. Une classe comporte 35 élèves.
On cherche à former un groupe de 3 élèves. Il y a $\binom{35}{3}$ tels groupes différents possibles.
3. Un jeu de carte comprend 54 cartes.
On en pioche 8 pour constituer une main. Une main est donc une partie à 8 éléments de l'ensemble de 54 cartes du jeu.
On peut donc former $\binom{54}{8}$ mains différentes possibles.

Exercice 15 :

Déterminer $\binom{3}{k}$ pour $0 \leq k \leq 3$ et $\binom{4}{k}$ pour $0 \leq k \leq 4$

Remarque

Considérons une expérience aléatoire que l'on réalise n fois dans des conditions identiques et un événement lié à cette expérience aléatoire.

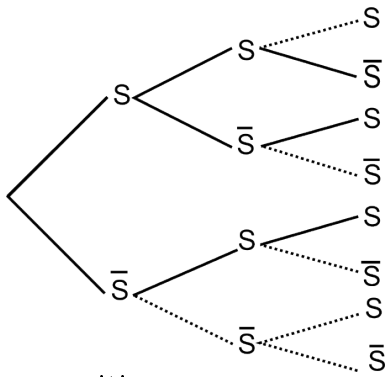
Soit $0 \leq k \leq n$. $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins conduisant à k succès sur l'arbre représentant l'expérience.

En effet une issue de l'expérience ayant k succès est un n -uplet de la forme $(S, S, \bar{S}, \dots, \bar{S}, S)$, elle contient k termes S et $n - k$ termes $\bar{S}$.

Compter les issues ayant k succès revient à dénombrer les façons de choisir les places des succès S dans la liste des n termes.

On retrouve alors :

- $\binom{n}{0} = 1$ car il n'y a qu'un seul chemin réalisant 0 succès : celui ne comportant que des échecs.
- $\binom{n}{n} = 1$ car il n'y a qu'un seul chemin réalisant n succès : celui ne comportant que des succès.
- $\binom{n}{1} = n$ car il y a n chemins réalisant 1 succès .



Ci-contre un arbre pour 3 réalisations de l'expérience.

Il y a 3 chemins conduisant à 2 succès.

$$\binom{3}{2} = 3$$

proposition

Soit n un entier naturel .

1. Pour tout entier $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2. Pour tout entier $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

3. Formule du triangle de Pascal :

Pour tout entier $1 \leq k \leq n$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Démonstration

1. admis

2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ car lorsqu'il y a k succès, il y a $n - k$ échecs. Compter les chemins menant à k succès revient à compter les chemins menant à $n - k$ échecs.

3. Comptons les chemins comportant k succès après $n + 1$ répétitions de l'expérience.

Il sont de deux types : ceux pour lesquels la dernière épreuve (la $(n + 1)$ -ième) donne un succès et ceux pour lesquels la dernière épreuve donne un échec.

- si la $(n + 1)$ -ième épreuve donne un succès, alors pour avoir un total de k succès, il faut que les n épreuves précédentes aient donné $k - 1$ succès. Il y a donc $\binom{n}{k-1}$ combinaisons possibles.
- si la $(n + 1)$ -ième épreuve donne un échec, alors pour avoir un total de k succès, il faut que les n épreuves précédentes aient donné k succès. Il y a donc $\binom{n}{k}$ combinaisons possibles.

Les ensembles de ces deux types de chemins sont disjoints on en déduit donc que

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Remarque

La relation de Pascal permet de calculer $\binom{n+1}{k}$ connaissant $\binom{n}{k}$ et $\binom{n}{k-1}$

On calcule les coefficients $\binom{n}{k}$ dans un tableau en utilisant $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	$\binom{0}{0}$					
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$				
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$			
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$		
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$	
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Exemples

1. $\binom{5}{3} = 10$, $\binom{4}{2} = 6$, $\binom{5}{1} = \binom{5}{4} = 5$

2. Retrouvons ce résultat à l'aide du calcul avec les factorielles :

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1)(2 \times 1)} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

3.

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1}{(2 \times 1)((n-2) \times (n-3) \times \dots \times 2 \times 1)} = \frac{n \times (n-1)}{2}$$

7 Lois usuelles

7.1 Loi certaine

Définition

On dit que $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suit une loi certaine s'il existe un réel a tel que :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) = a$$

Remarque :

On a alors $X(\Omega) = \{a\}$ et $P(X = a) = 1$

Proposition

Si X suit une loi certaine

$$E(X) = a \quad \text{et} \quad V(X) = 0$$

7.2 Loi uniforme

Schéma :

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n .

On en prend une au hasard et on note X le numéro tiré.

$X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$ et pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ $P(X = k) = \frac{1}{n}$ car tous les résultats sont équiprobables.

Définition

On dit que $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ si

$$X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket \quad \text{et pour tout } k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad P(X = k) = \frac{1}{n}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$.

Exemple :

Un client choisit au hasard un fournisseur parmi n fournisseurs.

Soit X le numéro du fournisseur choisi.

Alors X suit une loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$.

C'est le sens à donner au terme "au hasard".

Exercice 16 :

Une urne $\mathcal{U}$ contient 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher.

On pioche dans l'urne $\mathcal{U}$ successivement et sans remise les quatre boules.

On note Z le numéro du tirage auquel est apparue la boule noire.

Déterminer la loi de Z .

On précisera $Z(\Omega)$ et $P(Z = k)$ pour tout $k \in Z(\Omega)$.

Proposition

Soit X une v.a.r. de la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$,

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

Démonstration :

$$E(X) = \sum_{k=1}^n kP(X=k) = \sum_{k=1}^n k \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^n k^2 P(X=k) = \sum_{k=1}^n k^2 \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\text{d'où } V(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n+1}{12} (2(2n+1) - 3(n+1)) = \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}.$$

Exercice 17 :

Reprendre l'exemple précédent et déterminer l'espérance et la variance de X .

7.3 Loi de Bernoulli

Schéma :

On considère une expérience aléatoire ε et un événement A lié à ε de probabilité p .

On effectue alors une fois l'expérience ε .

Soit X la v.a.r définie par

$$\begin{cases} X = 1 & \text{si } A \text{ est réalisé} \\ X = 0 & \text{si } A \text{ n'est pas réalisé.} \end{cases}$$

X a pour loi

k	0	1
$P(X=k)$	$1-p$	p

On dit que X est la variable aléatoire indicatrice de l'événement A .

Définition

On dit qu'une v.a.r $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p , ($0 < p < 1$) si

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \quad \text{avec} \quad P(X=1) = p \text{ et } P(X=0) = 1-p$$

$$\text{On note } X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$$

La présence du 1 sera justifié avec la loi binomiale.

Exercice 18 :

Une urne contient 4 boules rouges et 3 boules blanches

On tire simultanément 2.

Soit X la v.a.r égale à 1 si les deux boules tirées sont de la même couleur et à 0 sinon.

Déterminer la loi de X .

Remarque :

Définir une variable de Bernoulli consiste à coder par 1 et 0 la réalisation ou non d'un événement.

Proposition

Soit X une v.a.r de Bernoulli de paramètre p , $0 < p < 1$ alors

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1 - p)$$

Démonstration :

$$E(X) = 1 \times P(X = 1) + 0 \times P(X = 0) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p.$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \text{ avec}$$

$$E(X^2) = 1^2 P(X = 1) + 0^2 P(X = 0) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$$

d'où

$$V(X) = p - p^2 = p(1 - p)$$

7.4 Loi binomiale

Schéma :

On considère une expérience aléatoire ε et un événement A lié à ε de probabilité p .

On effectue alors n fois l'expérience ε dans des conditions identiques (p est constant et les épreuves sont indépendantes).

Soit X la v.a.r. égale au nombre de réalisation de A au cours des n épreuves.

Par exemple, une urne contient des boules blanches et des boules noires. La probabilité de tirer une boule blanche au hasard est égale à p . On tire n boules au hasard avec remise entre les tirages.

On étudie la loi de probabilité de la v.a.r. X égale au nombre de boules blanches tirées.

X peut prendre les valeurs entières comprises entre 0 et n .

Déterminons la probabilité pour que X soit égale à k (entier compris entre 0 et n).

L'univers Ω est constitué des listes des résultats des n tirages.

L'événement $(X = k)$ est réalisé lorsque l'on a tiré k boules blanches et $n - k$ boules noires.

Il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir les rangs des k tirages ayant amenés les boules blanches.

Supposons que ce soit les k premiers.

On note B_j : "Le $j^{\text{ième}}$ tirage amène une boule blanche".

Comme les tirages sont indépendants on a :

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_k \cap \overline{B_{k+1}} \cap \dots \cap \overline{B_n}) &= P(B_1) \times \dots \times P(B_k) \quad \times P(\overline{B_{k+1}}) \times \dots \times P(\overline{B_n}) \\ &= \underbrace{p \times \dots \times p}_{k \text{ fois}} \quad \times \underbrace{(1 - p) \times \dots \times (1 - p)}_{n-k \text{ fois}} \\ &= p^k \times (1 - p)^{n-k}. \end{aligned}$$

Les tirages amenant k boules blanches à des rangs différents sont deux à deux disjoints donc

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Définition

On dit que la v.a.r. $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suit une loi binomiale de paramètres (n, p) , $n \in \mathbb{N}$, $(0 < p < 1)$ si :

$$1. X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$$

$$2. \text{ Pour tout } k \in \llbracket 0; n \rrbracket P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

$$\text{On note } X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).$$

Remarques :

1. La loi de Bernoulli est notée $\mathcal{B}(1, p)$ car elle est identique à la loi binomiale de paramètres $(1, p)$.

2. On considère une expérience aléatoire que l'on effectue n fois dans des conditions identiques et A un événement de probabilité p lié à cette expérience.

Soit X le nombre de réalisation de A au cours des n épreuves. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Le premier paramètre n de la loi binomiale est un entier et est égal au nombre de fois où l'on effectue l'expérience.

Le deuxième paramètre p est un réel de $[0, 1]$ et est égal à la probabilité de "succès".

Exemples :

1. On considère un jeu de 32 cartes. On tire successivement 5 cartes avec remise.

Soit X la v.a.r égale au nombre de rois obtenus.

On considère l'expérience : on tire une carte, que l'on répète 5 fois dans des conditions identiques et indépendantes (les tirages sont avec remise).

On considère l'événement S : "la carte obtenue est un roi " de probabilité $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

X est la variable égale au nombre de fois où l'événement S est réalisé lors des 5 épreuves.

X suit une loi binomiale de paramètres $\left(5, \frac{1}{8}\right)$.

On a donc $X(\Omega) = \llbracket 0; 5 \rrbracket$ et pour tout $k \in \llbracket 0; 5 \rrbracket$

$$P(X = k) = \binom{5}{k} \left(\frac{1}{8}\right)^k \left(\frac{7}{8}\right)^{5-k}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une personne effectue une succession de n lancers indépendants d'une pièce équilibrée.

Soit X le nombre de "Piles" obtenus.

On considère l'expérience : on lance une pièce, que l'on répète n fois dans des conditions identiques et indépendantes.

On considère l'événement S : "la pièce tombe sur Pile " de probabilité $\frac{1}{2}$.

X est la variable égale au nombre de fois où l'événement S est réalisé lors des n épreuves.

X suit une loi binomiale de paramètres $\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

On a donc $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ et pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Exercice 19 :

Soit X une v.a.r. de loi binomiale de paramètres $\left(4, \frac{1}{3}\right)$.

1. Déterminer explicitement les coefficients de la loi de X .
2. Calculer les probabilités suivantes :

$$P(X \leq 2) \quad P(1 < X \leq 3) \quad P(X \geq 1)$$

Proposition

Soit X une v.a.r. de loi binomiale de paramètres (n, p)

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1 - p)$$

Exercice 20 :

Un sac S contient 5 jetons : deux sont numérotés 1 et les trois autres sont numérotés 2.

1. Montrer que si l'on extrait deux jetons simultanément de S , la probabilité que ces deux jetons portent le numéro 2 est : $p = \frac{3}{10}$. (On pourra conserver cette notation pour la suite de la partie A).
2. Dans cette question on considère le sac S et on effectue 2100 tirages simultanés de deux jetons avec remise (les deux jetons obtenus à chaque tirage sont remis dans le sac S avant le tirage des deux jetons suivants).

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages où les deux jetons tirés portent le numéro 2.

- (a) Reconnaitre la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
(On précisera $X(\Omega)$ et $P(X = k)$ pour tout k de $X(\Omega)$.)
- (b) Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$ et vérifier que $V(X) = (21)^2$.

Exercice 21 :

On s'intéresse à un jeu présent dans une fête foraine.

Pour ce jeu de hasard, la mise pour chaque partie est de 1 euro.

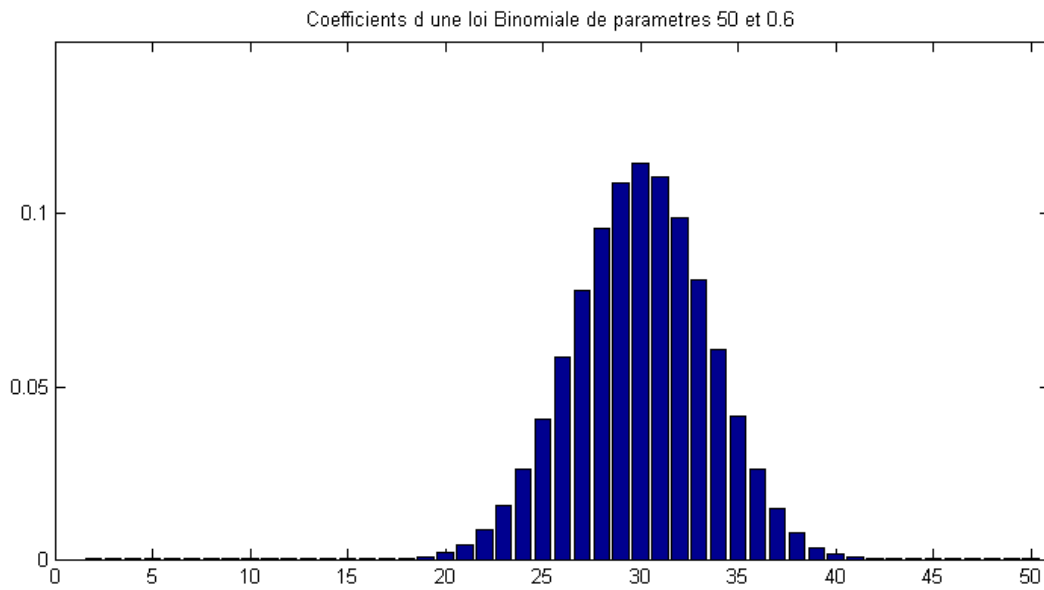
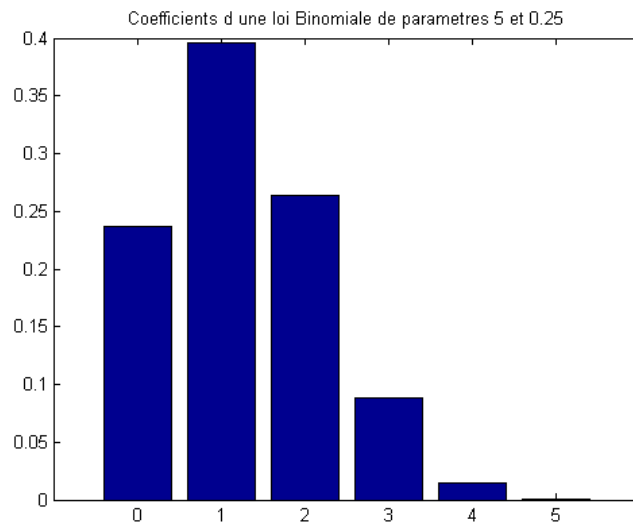
L'observation montre qu'une partie est gagnée avec la probabilité $\frac{1}{10}$, perdue avec la probabilité $\frac{9}{10}$.

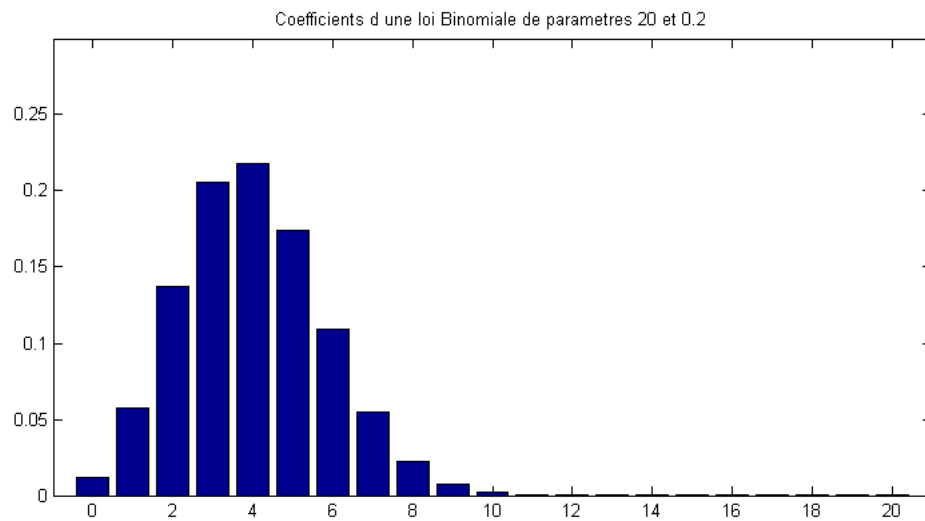
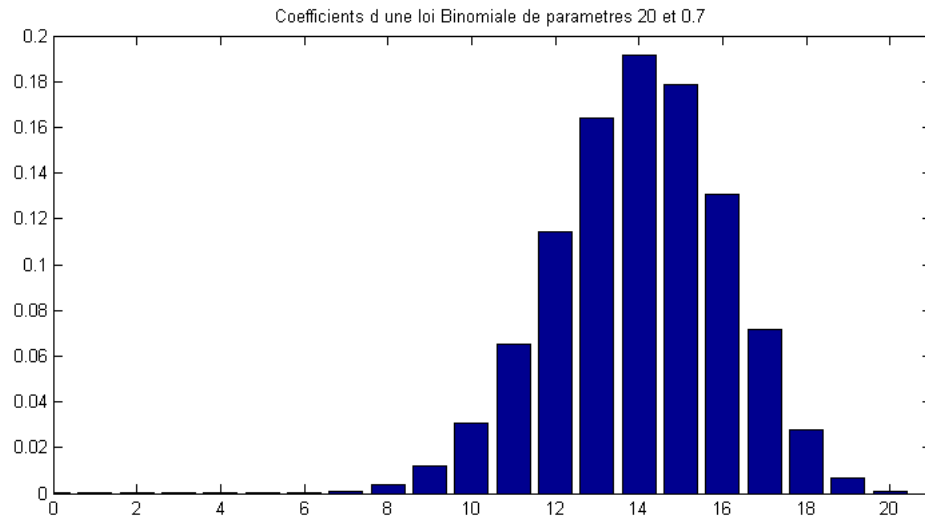
Toute partie gagnée rapporte 3 euros. Les différentes parties sont indépendantes.

Une personne décide de jouer N parties ($N \geq 2$).

On note X la variable aléatoire représentant le nombre de parties gagnées et Y la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.

1. Donner la loi de X , ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de cette variable.
2. Déterminer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie.
3. Exprimer Y en fonction de X . En déduire la valeur de l'espérance et de la variance de Y .





7.5 Formule du binôme de Newton

Soient a et b deux réels strictement positifs et n un entier naturel non nul.

$p = \frac{a}{a+b} \in [0, 1]$. On peut considérer une v.a.r. X de loi binomiale de paramètres $\left(n, \frac{a}{a+b}\right)$.

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in X(\Omega) \quad P(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{a}{a+b}\right)^k \left(1 - \frac{a}{a+b}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{a}{a+b}\right)^k \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k}$$

De la relation

$$\sum_{k=0}^n P(X = k) = 1$$

On obtient

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{a}{a+b}\right)^k \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k} = 1$$

or $\left(\frac{a}{a+b}\right)^k \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k} = \frac{a^k}{(a+b)^k} \times \frac{b^{n-k}}{(a+b)^{n-k}} = \frac{a^k b^{n-k}}{(a+b)^n}$

$$\text{d'où} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{a^k b^{n-k}}{(a+b)^n} = \frac{1}{(a+b)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = 1$$

$$\text{et enfin} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$$

Proposition : formule du binôme de Newton

Soient a et b deux réels et n un entier non nul :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Remarques

- Cette formule se démontre dans le cas général par récurrence.
- On a donc

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{n} a^n b^0$$

Les coefficients intervenant dans le développement de $(a+b)^n$ sont les entiers $\binom{n}{0}$,

$\binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ qui figurent sur la n -ième ligne du triangle de Pascal.

Exemple

Pour $n = 4$ on obtient l'identité remarquable :

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0} a^0 b^4 + \binom{4}{1} a^1 b^3 + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a^3 b^1 + \binom{4}{4} a^4 b^0 = b^4 + 4ab^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b + a^4$$

Exercice 22 :

A l'aide du triangle de Pascal développer

1. $A(x) = (2+x)^3$
2. $P(x) = (1-x)^6$.
3. $Q(x) = (x+2)^4$

Exercice 23 :

Déterminer les sommes suivantes :

$$S = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k \quad ; \quad T = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \quad ; \quad U = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

Variables aléatoires réelles finies : exercices

1) Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau suivant :

x_i	-3	-2	-1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,10	0,20	0,15	0,10	0,25	0,20

1. Vérifier que cela définit bien la loi d'une variable aléatoire.
 2. Tracer la fonction de répartition de X .
 3. Calculer $P(X \leq 0)$, $P(X > -1)$, $P(-2, 5 < X \leq 2.5)$.
 4. Déterminer l'espérance et la variance de X .
 5. On pose $Y = 2X - 1$. Déterminer l'espérance et la variance de Y .
 6. On pose $Z = X^2 - X$. Donner, sous forme d'un tableau, la loi de Z .
-

2) Un forain possède deux roues séparées en 10 secteurs égaux. Sur la première roue il y a 3 secteurs rouges et 7 blancs, sur la deuxième, 1 vert et 9 blancs.

Les gains sont distribués de la façon suivante :

3 euros si les des deux roues tombe sur les secteurs rouges et verts

1 euro si une seule des deux roues tombent sur un secteur blanc

0.5 euros si les deux roues tombent sur des secteurs blancs.

1. Soit X le gain distribué lors d'une partie.
 - (a) Déterminer la loi de X .
 - (b) Calculer $E(X)$.
 2. Soit m la mise exigée à chaque partie et soit Y le bénéfice réalisé par le forain.
 - (a) Exprimer Y en fonction de X . et donner $E(Y)$.
 - (b) Déterminer m pour que le bénéfice moyen soit d'au moins 25 centimes par parties.
-

3) Une urne contient 10 boules blanches et 2 noires. On extrait les boules de l'urne au hasard, une à une et sans remise, jusqu'à l'apparition d'une boule blanche.

On désigne alors par X la variable aléatoire égale au nombre total de boules prélevées.

1. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X .
 - (b) Calculer la valeur de $P[X = 1]$.
 - (c) Montrer que $P[X = 2] = \frac{5}{33}$
 - (d) Calculer $P[X = 3]$.
2. Montrer que $E(X) = \frac{13}{11}$.
3. Calculer $E(X^2)$ et en déduire que $V(X) = \frac{65}{363}$

4) On considère une urne $\mathcal{U}$ qui contient 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher et une urne $\mathcal{V}$ qui contient 2 boules noires et 2 boules blanches indiscernables au toucher. On lance une pièce qui amène pile avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et face avec la probabilité $\frac{2}{3}$. Si elle retombe sur le côté Pile, on tire deux boules successivement et avec remise dans $\mathcal{U}$, et si on obtient Face, on tire deux boules successivement et avec remise dans $\mathcal{V}$. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Déterminer la loi de X .
2. Calculer l'espérance et la variance de X .

5) On suppose qu'un serveur vocal reçoit 100 appels. On suppose que 5 % des appels reçus par le serveur concernent le produit A et 95 % des appels concernent le produit B . On note X la variable aléatoire égale au nombre d'appels concernant le produit A au cours des 100 appels reçus.

1. (a) Donner la loi de X . On précisera $X(\Omega)$ ainsi que $P(X = k)$ pour $k \in X(\Omega)$.
Une réponse argumentée est attendue.
(b) Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire X .
2. Déterminer la probabilité que le serveur ait au moins un appel pour le produit A .
3. On suppose que chaque appel concernant le produit A permet à la société d'engranger un bénéfice net de 95 euros et chaque appel concernant le produit B permet à la société d'engranger un bénéfice net de 5 euros. On note Y le bénéfice total de la société pour 100 appels.
Justifier que $Y = 90X + 500$. En déduire l'espérance et la variance de Y .

6) Une urne contenant 4 boules indiscernables au toucher : 1 blanche et 3 rouges. On pourra utiliser les événements R_k : " le k -ième tirage donne une boule rouge " et B_k : " le k -ième tirage donne une boule blanche ", pour k entier naturel non nul.

1. On tire simultanément deux boules dans cette urne puis on les remet dans l'urne.
Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules rouges ?
2. On effectue maintenant une succession de 10 tirages simultanés de 2 boules dans cette urne (en remettant les boules dans l'urne après chaque tirage).
Soit N la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on a obtenu deux boules rouges.
(a) Quelles sont les valeurs prises par N ?
(b) Reconnaître la loi de N . On précisera $P(N = k)$ pour tout entier $k \geq 1$.
(c) En déduire son espérance et sa variance.
On effectue désormais des tirages d'une boule sans remise dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.
Soit Y la variable aléatoire égale au rang du tirage où l'expérience s'arrête.
3. (a) Quelles sont les valeurs prises par Y ?
(b) Décrire l'événement $(Y = 2)$ et calculer $P(Y = 2)$.
(c) Déterminer la loi de Y , son espérance $E(Y)$ et sa variance $V(Y)$.
(d) Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges restant dans l'urne au moment où l'expérience s'arrête.
Exprimer Z en fonction de Y .
En déduire la loi de Z , son espérance $E(Z)$ et sa variance $V(Z)$.

7) Un immeuble est constitué de 3 étages. Dans le hall de l'immeuble on peut accéder à un ascenseur qui distribue chaque étage.

5 personnes montent ensemble dans l'ascenseur.

On suppose que chacune d'elle souhaite monter à l'un des trois étages de manière équiprobable et indépendamment des 4 autres.

On suppose également que l'ascenseur dessert les étages demandés dans l'ordre et ne revient pas en arrière.

On note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage numéro 1, X_2 la variable aléatoire égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage numéro 2 et X_3 celle égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage numéro 3.

1. (a) Reconnaître la loi de X_1 .
(b) Donner $E(X_1)$.
(c) Expliquer pourquoi X_2 et X_3 suivent la même loi que X_1 .
2. On considère la variable aléatoire Z égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur.
Soit Y_1 la variable aléatoire de Bernoulli égale à 1 si l'ascenseur s'arrête au premier étage et à 0 sinon.
On définit de même les variables aléatoires Y_2 et Y_3 pour les étages 2 et 3.
(a) Justifier que $P(Y_1 = 0) = P(X_1 = 0)$.
(b) En déduire $P(Y_1 = 1)$ puis $E(Y_1)$.
On admet que Y_2 et Y_3 suivent la même loi que Y_1 et qu'elles ont donc la même espérance.
(c) Exprimer Z en fonction de Y_1 , Y_2 et Y_3 .
Calculer $E(Z)$ et vérifier que $E(Z) = \frac{211}{81}$

8) Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. Un joueur effectue trois tirages successifs d'une boule dans cette urne. Il remet la boule obtenue dans l'urne après chaque tirage. A partir du deuxième tirage, le joueur reçoit un point à chaque fois que la couleur obtenue à un tirage n'est pas celle qui a été obtenue au tirage précédent. Dans le cas contraire il ne reçoit aucun point.

Ainsi, si les trois tirages successifs amènent : *blanc, rouge, rouge* le joueur marque un point au deuxième tirage et aucun au troisième tirage.

on introduit, pour tout entier k compris entre 1 et 3 les événements B_k : « obtenir une boule blanche au k -ième tirage » et R_k : « obtenir une boule rouge au k -ième tirage ».

1. Soit X_2 la variable aléatoire de Bernoulli égale au gain du joueur lors du deuxième tirage.
C'est à dire que X_2 est égale à 1 si le joueur marque un point lors du deuxième tirage et que X_2 est égal à 0 sinon.
(a) Justifier que $(X_2 = 1) = (B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)$. Calculer $P(X_2 = 1)$.
(b) Donner $E(X_2)$ et $V(X_2)$.
2. Soit X_3 la variable aléatoire de Bernoulli égale au gain du joueur lors du troisième tirage.
(a) Justifier que X_3 suit la même loi que X_2 .
(b) Soit G la variable aléatoire égale au nombre total de points marqués lors des trois tirages.
Exprimer G en fonction de X_2 et X_3 . En déduire $E(G)$.

3. On suppose à présent que le joueur effectue n tirages successifs, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. Il remet toujours la boule obtenue dans l'urne après chaque tirage. Les règles du jeu restent inchangées et on continue à noter G le nombre total de points marqués lors de ces n tirages.

- (a) On importe la librairie `numpy.random` par la commande : `numpy.random as rd`.
Expliquer ce que réalisent les instructions :

`rd.binomial(1,1/3)`

et

`rd.binomial(1,1/3,n)`

- (b) On considère le programme Python suivant :

```
1. import numpy.random as rd
2. X=....
3. G=0
4. for k in range(1,100):
5.     if X[k]!=X[k-1] :
6.         .....
7. print(G)
```

- i. Quelle instruction faut-il ajouter à la ligne 2 pour que la variable X contienne la simulation de 100 tirages dans l'urne ?
- ii. Quelle instruction faut-il ajouter à la ligne 6 pour que le programme affiche le nombre de points marqués par le joueur ?

9) Soit n un entier naturel non nul et X une variable aléatoire réelle discrète dont l'univers image $X(\Omega)$ est inclus dans l'ensemble $\{0, 1, \dots, n\}$.

$E(X) = \sum_{k=1}^n kP(X = k)$ est l'espérance mathématique de X .

L'objectif de cet exercice est de prouver et d'utiliser l'égalité notée **(R)** :

$$E(X) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k)$$

1. Etude d'un exemple. Soit X qui suit une loi binomiale de paramètres 2 et $\frac{3}{4}$.

- (a) Donner les coefficients de la loi de X .
- (b) Calculer $P(X \geq 1) + P(X \geq 2)$.
- (c) Donner la valeur de l'espérance $E(X)$. Vérifier l'égalité **(R)**.

2. On revient au cas général : X est telle que $X(\Omega)$ est inclus dans l'ensemble $\{0, 1, \dots, n\}$.

- (a) Justifier pour $k \in \{1, \dots, n\}$ l'égalité :

$$P(X \geq k) = P(X = k) + P(X = k + 1) + \dots + P(X = n)$$

- (b) En écrivant puis en sommant les égalités précédentes de $k = 1$ à n , en déduire l'égalité **(R)**.

3. Un jeu vidéo est constitué de n niveaux successifs.
 Lorsque le joueur commence un niveau, ce qui suppose qu'il ait réussi tous les niveaux précédents, la probabilité qu'il le réussisse est $\frac{2}{3}$. Le jeu s'arrête dès que le joueur échoue à un niveau.
 On note X la variable aléatoire égale au nombre de niveaux réussis par le joueur.
- (a) Donner $X(\Omega)$.
- (b) On note N_j l'événement « Le joueur a réussi le niveau j ».
 Exprimer pour tout entier naturel k de $\{1, \dots, n\}$ l'événement $(X \geq k)$ à l'aide des événements $N_1, N_2, \dots, N_k$.
 En déduire : $P(X \geq k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k$
- (c) En utilisant la formule **(R)**, calculer l'espérance $E(X)$.

10) Une usine fabrique des pièces mécaniques. Chaque pièce a une probabilité de présenter un défaut égal à p , ($0 < p < 1$) et ce de manière indépendante. On prend au hasard un échantillon de N pièces ($N \in \mathbb{N}^*$).

1. On note D la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses dans cet échantillon.
 Reconnaître la loi suivie par D ; préciser la valeur de son espérance ainsi que celle de sa variance.
2. Déterminer en fonction de p et de N les probabilités $P(D = 0)$ et $P(D \geq 1)$

Deux tests sont mis en place : le test T_1 permet de savoir si une pièce quelconque est défectueuse et son coût est posé égal à 1, le test T_2 permet de savoir si au moins une pièce est défectueuse dans un échantillon de taille quelconque et son coût, cinq fois supérieur à celui du test T_1 est posé égal à 5.

Pour dépister les éléments défectueux de l'échantillon de N pièces, une première stratégie consiste à tester les pièces une à une à l'aide de T_1 .

3. Combien cette première stratégie nécessite-t-elle de tests T_1 ? Quel est son coût ?

Une seconde stratégie consiste à effectuer T_2 sur la totalité de l'échantillon puis, si celui-ci s'avère positif, à tester alors toutes les pièces une à une à l'aide de T_1

4. On note X la variable aléatoire égale au coût de cette seconde stratégie.
- (a) Montrer que X ne prend que deux valeurs qui sont 5 et $5 + N$
- (b) Montrer que $P(X = 5) = (1 - p)^N$. Que vaut $P(X = 5 + N)$?
- (c) Quel sens peut-on donner à l'espérance de la variable aléatoire X ? La calculer.
5. Montrer qu'en moyenne, la seconde stratégie est moins coûteuse que la première si et seulement si p et N vérifient l'inégalité suivante :

$$\frac{5}{N} < (1 - p)^N$$

- 11)** Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant :
- une boule numérotée 1.
 - deux boules numérotées 2.
 -
 - n boules numérotées n .

Epreuve 1

On tire une boule dans cette urne, on note X la variable aléatoire représentant le numéro de la boule obtenue.

1. Rappeler pour tout entier naturel $n \geq 1$ la valeur de $\sum_{k=1}^n k$
2. Déterminer le nombre total de boules dans l'urne.
3. Déterminer la loi de X et vérifier en particulier que : $P(X = n) = \frac{2}{n+1}$
4. On rappelle que pour tout entier n non nul : $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Calculer l'espérance de X en fonction de n .

Epreuve 2

On tire maintenant 10 fois une boule avec remise dans cette urne, on note Y la variable aléatoire représentant le nombre de fois où l'on a obtenu une boule numérotée n .

1. Reconnaître la loi de Y .
2. Donner la valeur de l'espérance et de la variance de Y .

Epreuve 3.

On se place maintenant dans le cas où $n = 2$. Ainsi l'urne contient une boule numérotée 1 et deux boules numérotées 2. On effectue dans cette urne deux tirages successifs sans remise de la première boule tirée.

On note T_1 la variable aléatoire représentant le numéro de la première boule tirée et T_2 la variable aléatoire représentant le numéro de la deuxième boule tirée.

1. (a) Déterminer la loi de la variable T_1 .
(b) Déterminer l'espérance et la variance de T_1 .
2. (a) Donner les probabilités :

$$P((T_1 = 1) \cap (T_2 = 1)) \quad P((T_1 = 1) \cap (T_2 = 2)) \quad P((T_1 = 2) \cap (T_2 = 1)) \quad P((T_1 = 2) \cap (T_2 = 2))$$

- (b) En déduire la loi de la variable T_2 et donner son espérance et sa variance.

12) Dans son atelier, John von Neumann possède une machine permettant de créer, pour chaque nombre réel $p \in]0, 1[$, une pièce tombant sur PILE avec probabilité p . On nomme « pièce équilibré », une pièce dont la probabilité de tomber sur PILE est $\frac{1}{2}$. L'exercice est composé de deux parties **indépendantes**. Dans tout l'énoncé, on note $P(A)$ la probabilité d'un événement A .

Première partie

On considère un nombre réel $p \in]0, 1[$ et on utilise dans cette partie, une pièce de l'atelier de von Neumann ayant une probabilité p de tomber sur PILE.

1. On lance successivement deux fois la pièce et on note à chaque fois le résultat (PILE ou FACE) obtenu.
 - (a) On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où on a obtenu PILE au cours de ces deux lancers. Reconnaître la loi de X et justifier votre réponse.
 - (b) Calculer la probabilité $P(X = k)$ pour toutes les valeurs k prises par X . Montrer en particulier que $P(X = 1) = 2p(1 - p)$.
2. Une *manche* consiste à lancer deux fois successivement la pièce et on nomme « succès » le fait d'obtenir deux résultats différents et « échec » celui d'obtenir deux résultats identiques. Quelle est la probabilité de « succès » de cette expérience de Bernoulli ?
3. On répète indéfiniment des manches comme ci-dessus. Chaque manche est supposée indépendante des autres. On note N la variable aléatoire égale au nombre de manches effectuées jusqu'à l'obtention d'un premier succès.
 - (a) Dans le cas où les tirages successifs sont PP, FF, PP, PP, FF, PF, FP, PP, ... (on a abrégé PILE en P et FACE en F), donner la valeur de N .
 - (b) Reconnaître la loi de N et donner l'expression de $P(N = k)$ pour toutes les valeurs k prises par N .
 - (c) Donner, si elles existent, l'espérance et la variance de N .
4. Pour deux joueurs Alice et Bob souhaitant s'affronter, l'atelier de von Neumann conseille le jeu suivant : à l'aide d'une pièce de sa production, on réalise une manche comme ci-dessus puis une deuxième si la première manche est constituée de deux résultats identiques. On déclare alors Alice gagnante si l'issue d'une des deux manches est PF et Bob est gagnant si l'issue d'une des deux manches est FP. Dans les autres cas, la partie est nulle. Par exemple, si on lance la pièce et que l'on obtient la séquence suivante : FF, PF alors Alice est gagnante.
 - (a) Calculer, en fonction de p , la probabilité qu'Alice gagne lors de la première manche.
 - (b) Montrer que la probabilité qu'Alice gagne lors de la seconde manche (en particulier, aucun des deux joueurs ne remporte la première manche) est égale à

$$p(1 - p) (p^2 + (1 - p)^2) .$$

- (c) Expliquer pourquoi, quelle que soit la valeur du paramètre p , le jeu est équitable.

Deuxième partie

Dans cette partie de l'exercice, on considère une pièce équilibrée ($p = \frac{1}{2}$) que l'on lance successivement trois fois. On note S la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus au cours de ces trois lancers. On note aussi T la variable aléatoire égale à 0 si on n'obtient aucun PILE lors de ces trois lancers et égale au rang du premier PILE obtenu si un PILE apparaît. Par exemple, si une succession de trois lancers amène « FPF », on a $S = 1$ et $T = 2$.

5. Le programme Python ci-dessous a pour objectif de simuler une succession de 3 lancers et d'afficher les valeurs prises par S et T .

Recopier et compléter la ligne 7 afin que ce programme affiche la bonne valeur de S

```
1. import numpy.random as rd
2. S=0
3. T=0
4. for k in range(1,4) :
5.     r=rd.random()
6.     if r<1/2 :
7.         S=.....
8.     if r<1/2 and T==0 :
11.         T=k
12. print('S=',S,'et T=',T)
```

6. Reconnaître la loi de S . Donner son espérance ;
7. Quelles sont les valeurs possibles pour T ?
8. Décrire l'événement $((S = 2) \cap (T = 1))$ et montrer que sa probabilité est $\frac{1}{4}$
9. Calculer les valeurs des réels **A**, **B**, **C**, **D** et **E** du tableau ci-dessous donnant les probabilités des $P((S = i) \cap (T = j))$. On ne demande pas de justifier les calculs de cette question.

Tableau des $P((S = i) \cap (T = j))$

$i \backslash j$	0	1	2	3
0	1/8	A	0	0
1	B	1/8	1/8	C
2	0	D	1/8	0
3	0	1/8	0	E

10. Calculer $P(S = T)$.
11. Sachant qu'on a obtenu exactement deux fois PILE au cours des trois lancers, quelle est la probabilité que le premier lancer ait donné PILE ?

13) On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules rouges et de boules blanches indiscernables au toucher.

Une urne contient initialement une boule rouge et une boule blanche indiscernable au toucher.

On effectue dans cette urne une succession d'expériences aléatoires selon le protocole suivant : on extrait une boule de l'urne et après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on ajoute dans l'urne une boule de la même couleur que la boule tirée.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note X_n (respectivement Y_n) la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges (respectivement blanches) contenues dans l'urne à l'issue de la n -ème expérience, c'est à dire après le tirage d'une boule et la remise d'une boule supplémentaire.

Pour tout entier $k \geq 1$, on note R_k (respectivement B_k) l'événement "tirer une boule rouge (respectivement blanche) lors du k -ème tirage".

- Justifier que $X_1(\Omega) = \llbracket 1, 2 \rrbracket$. Donner la loi de X_1 . Calculer $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
- Exprimer les événements $[X_2 = 1]$, $[X_2 = 2]$ et $[X_2 = 3]$ en fonction des événements B_1, B_2, R_1 et R_2 .
- Montrer que X_2 suit la loi uniforme discrète sur $\llbracket 1, 3 \rrbracket$. En déduire $E(X_2)$ et $V(X_2)$.

2. (a) Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer l'événement $[X_n = 1]$ en fonction des événements $B_1, \dots, B_n$.

(b) Montrer que $P(X_n = 1) = \frac{1}{n+1}$. De même calculer $P(X_n = n+1)$.

3. (a) Etablir pour tout entier $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, les égalités suivantes :

$$P_{[X_n=k-1]}(X_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2} \text{ et } P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k) = \frac{n+2-k}{n+2}.$$

(b) En déduire pour tout $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, une relation entre $P(X_{n+1} = k)$, $P(X_n = k)$ et $P(X_n = k-1)$.

(c) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier $n \geq 1$, la variable aléatoire X_n suit la loi discrète uniforme sur $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

4. Compléter le programme Python suivant afin qu'il simule et affiche une réalisation de la variable aléatoire X_n où l'entier n est entré au clavier.

```
1. import numpy.random as rd
2. n=int(input('donner un entier n:'))
3. r=1
4. b=1
5. for k in range(1,n+1):
6.     if rd.random()<r/(r+b) :
7.         .....
8.     else :
9.         ....
10. print(....)
```