

Suites numériques - limites

1 Variations et bornes

1.1 Variation d'une suite

Définition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.

- La suite est dite croissante (resp strictement croissante) si
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ (resp $u_{n+1} > u_n$)
- La suite est dite décroissante (resp strictement décroissante) si
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$ (resp $u_{n+1} < u_n$)

- La suite est dite constante si

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.

On a alors :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$.

- La suite est dite monotone (resp strictement monotone) si elle est croissante ou décroissante (resp strictement croissante ou strictement décroissante)

Dans la pratique :

pour étudier le sens de variation de la suite (u_n) on peut étudier le signe de la différence de deux termes consécutifs $u_{n+1} - u_n$.

- si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors $u_{n+1} \geq u_n$ et la suite (u_n) est croissante.
- si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors $u_{n+1} \leq u_n$ et la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 1 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Exercice 2 :

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = -v_n^2 - v_n - 1$.

Etudier la monotonie de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 3 :

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = 2^n - n$.

Etudier la monotonie de la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Exercice 4 :

Etudier la monotonie des suite (r_n) , (s_n) et (t_n) définies par

$$r_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad s_n = 2^n, \quad t_n = (-2)^n$$

Proposition

- Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .
- Si $r < 0$ la suite (u_n) est strictement décroissante.
 - Si $r = 0$ la suite (u_n) est constante.
 - Si $r > 0$ la suite (u_n) est strictement croissante.

Démonstration

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = r$

Proposition : Sens de variation de la suite (q^n)

- si $q > 1$ la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- si $0 < q < 1$ la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- si $q = 1$ la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante,
- si $q = 0$ la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir du rang 1.
- Si $q < 0$ alors q^n et q^{n+1} sont de signes contraires, la suite prend successivement des valeurs positives et négatives, donc la suite n'est pas monotone.

Démonstration

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q^{n+1} - q^n = q^n(q - 1)$.

Si $q \geq 0$ alors $q^n \geq 0$ et $q^{n+1} - q^n$ est du signe de $q - 1$.

En fonction du signe de u_0 , on en déduit le sens de variation de la suite $(u_0 q^n)_{n \in \mathbb{N}}$

Exercice 5 :

Donner le sens de variation des suites suivantes :

$$u_n = 2 \times 3^n; \quad v_n = -\frac{1}{2} \times 5^n; \quad w_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n; \quad r_n = (-2)^n.$$

1.2 Suites majorées, minorées, bornées

Définition

- La suite est dite majorée s'il existe un réel M tel que
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
- La suite est dite minorée s'il existe un réel m tel que
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.
- La suite est dite bornée si elle majorée et minorée.

Exercice 6 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{4n-1}{n+3}$.

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n) .
2. Montrer que (u_n) est majorée par 4 et minorée par -1.

Remarques :

- Si M est un majorant de (u_n) alors M est indépendant de n .
- Si M est un majorant de (u_n) alors tout réel $A \geq M$ est également un majorant de (u_n) .
- On a les mêmes résultats avec les minorants.

Exercice 7 :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad 1 + \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq 2n$$

1. La suite (u_n) est-elle minorée ?
2. La suite (u_n) est-elle majorée ?

2 Comportement asymptotique d'une suite

2.1 Suites convergentes

Définition

Soit $l \in \mathbb{R}$.

On dit que la suite (u_n) admet l pour limite si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les réels u_n à partir d'un certain rang.

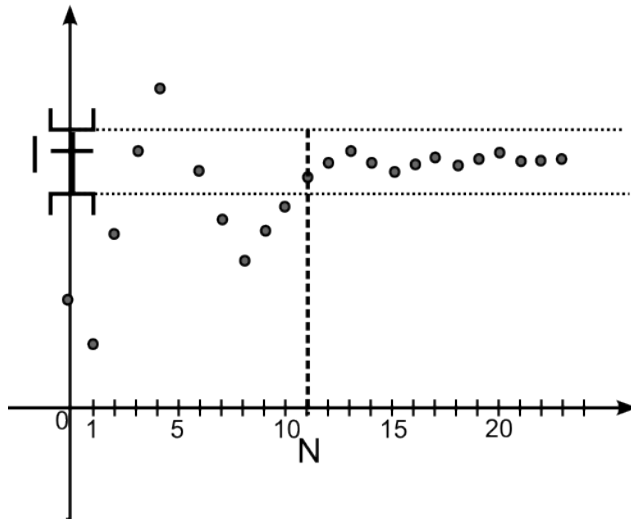
On note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$$

Remarques :

- (u_n) converge vers l si tout intervalle ouvert contenant l contient les u_n pour tous les indices n sauf pour un nombre fini d'entre eux.
- Dans la définition, l'intervalle ouvert $]a, b[$ contenant l est sensé pouvoir devenir aussi petit que l'on veut.

Représentation graphique :



Remarques

- Une suite qui admet une limite finie est dite convergente.
- Une suite peut très bien ne pas posséder de limite. C'est le cas de la suite de terme général $(-1)^n$.
- Une suite constante admet une limite : la valeur de cette constante.

Proposition

Si (u_n) admet une limite finie, alors celle-ci est unique. On peut donc parler de **la** limite de (u_n)

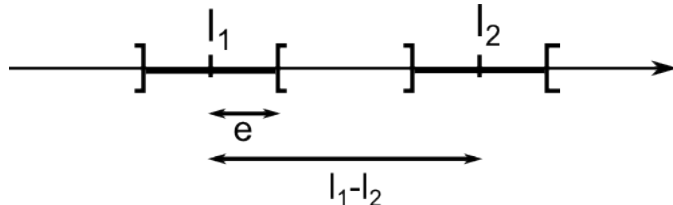
Démonstration :

Effectuons un raisonnement par l'absurde.

Supposons donc que la suite (u_n) admette deux limites distinctes l_1 et l_2 avec $l_1 < l_2$.

$l_2 - l_1 > 0$ représente l'écart entre ces deux limites.

En posant $e = \frac{l_2 - l_1}{4}$, les intervalles ouverts $]l_1 - e, l_1 + e[$ et $]l_2 - e, l_2 + e[$ sont disjoints, comme sur le dessin :



L'intervalle ouvert $]l_1 - e, l_1 + e[$ contient l_1 , et l_1 est une limite de la suite donc il existe un rang n_1 à partir duquel tous les termes de la suite sont dans cet intervalle :

pour tout $n \geq n_1$, $u_n \in]l_1 - e, l_1 + e[$.

De même l'intervalle ouvert $]l_2 - e, l_2 + e[$ contient l_2 , et l_2 est une limite de la suite donc il existe un rang n_2 à partir duquel tous les termes de la suite sont dans cet intervalle :

pour tout $n \geq n_2$, $u_n \in]l_2 - e, l_2 + e[$.

Si on pose $N = \max(n_1, n_2)$ alors $N \geq n_1$ donc $u_N \in]l_1 - e, l_1 + e[$ et $N \geq n_2$ donc $u_N \in]l_2 - e, l_2 + e[$.

Donc on a un terme de la suite u_N qui appartient aux deux intervalles. Alors on obtient une contradiction car ces deux intervalles sont d'intersection vide.

Proposition : limite des suites de références

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$$

Plus généralement pour $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0$$

Remarque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - l = 0$$

Exercice 8 :

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie pour tout $n \geq 1$ par :

$$u_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2}$$

1. Calculer $u_n - 2$.
2. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

2.2 Limite infinie d'une suite

Définition

- On dit qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$ (lorsque n tend vers $+\infty$) si tout intervalle de la forme $]a, +\infty[$ contient tous les réels u_n à partir d'un certain rang

On note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

- On dit qu'une suite (u_n) tend vers $-\infty$ (lorsque n tend vers $+\infty$) si tout intervalle de la forme $] -\infty, a[$ contient tous les réels u_n à partir d'un certain rang

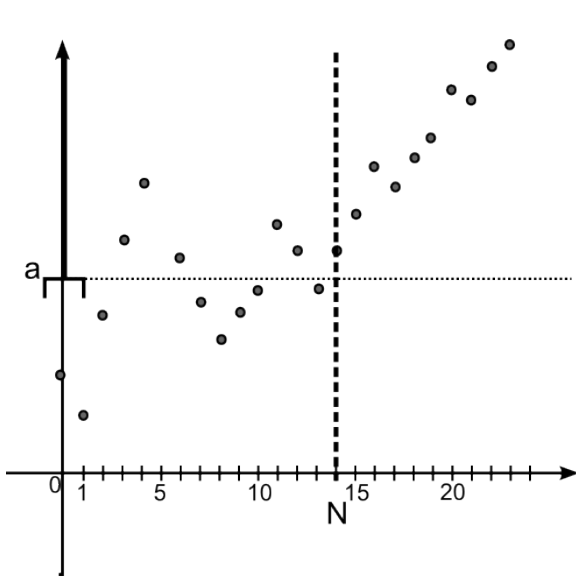
On note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$$

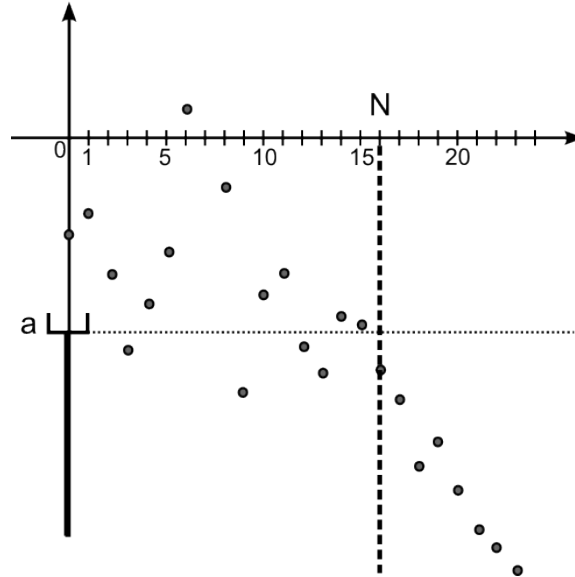
Remarques :

- (u_n) tend vers $+\infty$ si u_n prend des valeurs aussi grandes que l'on veut pour n suffisamment grand.
- Dans la définition, le réel a de l'intervalle ouvert $]a, +\infty[$ est sensé pouvoir devenir aussi grand que l'on veut.

Interprétation graphique



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

Remarque

Une suite (u_n) est dite divergente si :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$
- (u_n) n'admet pas de limite (finie ou infinie)

Proposition : limite des suites de références

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$$

Plus généralement pour $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty$$

2.3 limites et opérations algébriques

2.3.1 Produit d'une suite par un réel

Soit λ un réel.

Le tableau suivant donne le comportement asymptotique de $\lambda.(u_n)$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	l	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda u_n$ si $\lambda > 0$	λl	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda u_n$ si $\lambda < 0$	λl	$-\infty$	$+\infty$

Exercice 9 :

Déterminer les limites suivantes :

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} -2n^2 \quad b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^3} \quad c) \lim_{n \rightarrow +\infty} 4\sqrt{n}$$

2.3.2 Somme de deux suites

Le tableau suivant donne le comportement asymptotique de $(u_n) + (v_n)$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Exercice 10 :

Déterminer les limites suivantes :

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^2 + 3n \quad b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} + 2 \quad c) \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{2}{n} \quad d) \lim_{n \rightarrow +\infty} 3\sqrt{n} - \frac{1}{n} \quad e) \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n + 2$$

2.3.3 Produit de deux suites

Le tableau suivant donne le comportement asymptotique de $(u_n) \times (v_n)$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	l	$l < 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l > 0$	0	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	l'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Exercice 11 :

Déterminer les limites suivantes :

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n^2 + 3n)(-n + 1) \quad b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n^2} \quad c) \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 + n)\sqrt{n} \quad d) \lim_{n \rightarrow +\infty} (3n^2 + 1) \frac{1}{n}$$

2.3.4 Quotient de deux suites

Supposons que (v_n) ne s'annule pas .

Le tableau suivant donne le comportement asymptotique de $\frac{u_n}{v_n}$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	l'	$\pm\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Exercice 12 :

Déterminer les limites suivantes :

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 3n}{-1 + \frac{1}{n}} \quad b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^2 + n} \quad c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n + 3}{n - 1}$$

Remarque :

On rappelle la propriété donnant la limite d'une fonction polynôme et rationnelle en $+\infty$:

Proposition

- La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
- La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré.

On obtient alors les limites des suites suivantes :

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} (-3n^4 + 5n^2 - n + 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-3n^4) = -\infty.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5n^4 - 3n^2 + 1}{2n^2 + 2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5n^4}{2n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{2}n^2 \right) = +\infty.$$

Exercice 13 :

Déterminer les limites des suites suivantes :

$$1. u_n = 3n^2 + 2n - 1 .$$

$$2. u_n = \frac{n^2 + n - 1}{n - 2} .$$

$$3. u_n = \frac{1 - n}{(n - 3)^2} .$$

$$4. u_n = \left(n - \frac{1}{n} \right) \left(\frac{n + 1}{2n^2} \right) .$$

2.4 Image d'une suite par une fonction

Proposition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (u_n) une suite vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
 a et l désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$, $a \in I$.

$$\begin{aligned} \text{si } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \\ \text{alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = l \end{aligned}$$

Remarques :

- En particulier si f est continue sur I et si a est un réel de I alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
donc si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(a)$.
- C'est la "composée" de la limite d'une suite et d'une fonction.

Exercice 14 :

Etudier les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + n + 1} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n+1}{4n+2}}$$

Exercice 15 :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier } n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{2u_n + 1}$$

On admet que la suite (u_n) converge. On pose $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

- Montrer par récurrence que : $\forall n \geq 0, \quad u_n \geq 0$.
- Vérifier que $l = \frac{l+8}{2l+1}$ puis en déduire la valeur de l .

3 Limites des suites arithmétiques et géométriques

3.1 Limites des suites arithmétiques

Proposition

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0

- si $r > 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- si $r = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0$.
- si $r < 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + n \times r$$

- si $r > 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \times r = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- si $r = 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0$.
- si $r < 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \times r = -\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Exercice 16 :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites arithmétiques de raison 4 et -3 et de premiers termes -9 et 6.
Déterminer les limites des suites (u_n) , (v_n) et $(u_n + v_n)$

3.2 Limite des suites géométriques

Exercice 17 :

Donner les 6 premiers termes des suites suivantes :

$$u_n = 2^n \quad v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad w_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad r_n = (-2)^n$$

Proposition

- si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- si $q = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$.
- si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- si $q \leq -1$ alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

Proposition

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0

- si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } u_0 > 0 \\ -\infty & \text{si } u_0 < 0 \end{cases}$.
- si $q = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0$.
- si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- si $q \leq -1$ alors la suite (u_n) n'a pas de limite.

Exercice 18 :

Déterminer les limites des suites suivantes :

$$a) u_n = -6 \times 2^n \quad b) v_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad c) w_n = 3^n - 7^n$$

Exercice 19 :

1. On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1}$$

Déterminer la limite de f en $+\infty$

2. En déduire la limite de la suite suivante :

$$u_n = \frac{4^n - 3 \times 2^n + 1}{2^n + 1}$$

4 Limites et relation d'ordre

4.1 Existence d'une limite par encadrement

Proposition : Théorème d'encadrement

Soit l un réel et (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant :

- A partir d'un certain rang

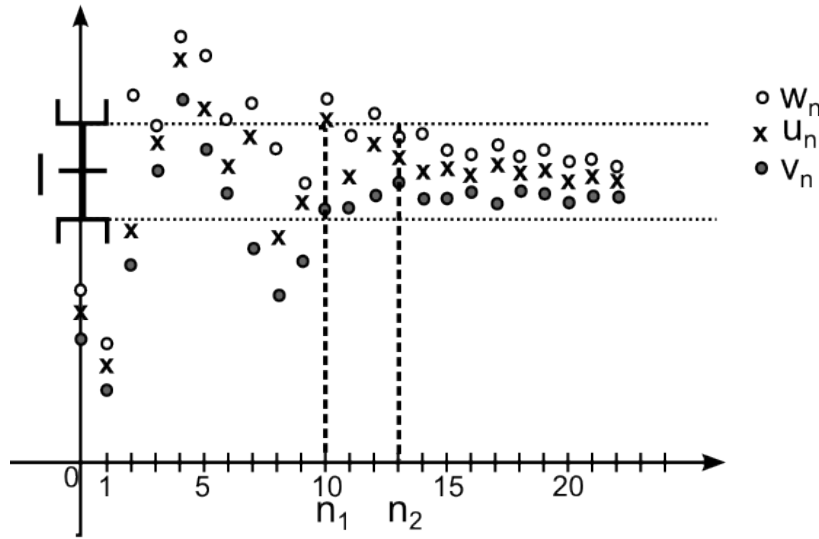
$$v_n \leq u_n \leq w_n$$

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$

Alors la suite (u_n) converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

Démonstration :



Soit I un intervalle ouvert contenant l .

- à partir d'un certain rang n_1 tous les termes v_n sont dans I car (v_n) converge vers l
- à partir d'un certain rang n_2 tous les termes w_n sont dans I car (w_n) converge vers l
- soit $n \geq \max(n_1, n_2)$, $v_n \in I$, $w_n \in I$ et $v_n \leq u_n \leq w_n$ donc $u_n \in I$.

La suite (u_n) converge donc vers l .

Exercice 20 :

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par : $\forall n \geq 1, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 21 :

Soit (u_n) une suite vérifiant :

- (u_n) est décroissante
- $\forall n \geq 0, \quad u_{n+2} + 3u_{n+1} + 2u_n = \frac{1}{n+1}$

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$:

$$\frac{1}{6(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{6(n-1)}$$

2. Montrer que les suites (u_n) et (nu_n) sont convergentes et déterminer leurs limites.

Exercice 22 :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = \frac{2}{3} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n$$

1. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq u_n$$

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$u_{n+1} \leq \frac{2}{3} u_n$$

3. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

4. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Proposition : Théorème d'encadrement

Soient l un réel, (u_n) et v_n deux suites vérifiant :

- A partir d'un certain rang

$$|u_n - l| \leq v_n$$

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

Alors (u_n) converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

Exemple

Soit (u_n) une suite telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - 3| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

donc par encadrement (u_n) converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$$

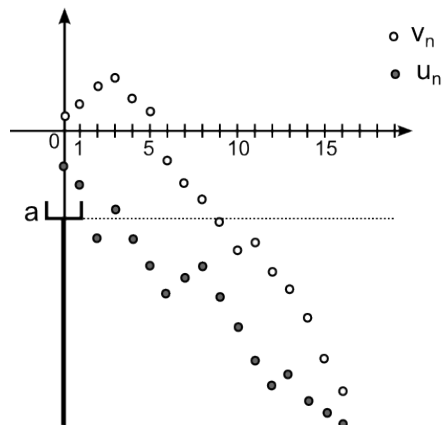
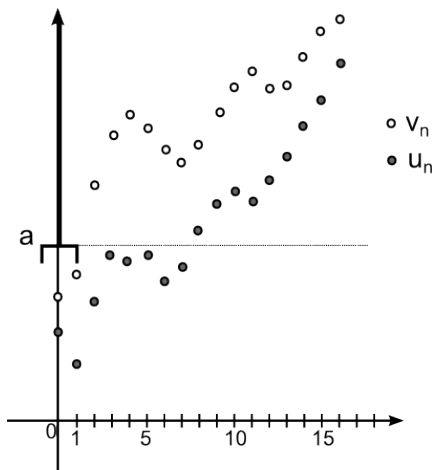
4.2 Théorème de comparaison

Proposition : Théorème de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant à partir d'un certain rang :

$$u_n \leq v_n$$

- si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

Exemple

Pour tout $n \geq 1$, $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 1$. Donc

$$n \leq n!$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \text{ donc par comparaison } \lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$$

4.3 Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre

Proposition : passage à la limite dans les inégalités

Soient l et l' deux réels et (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant :

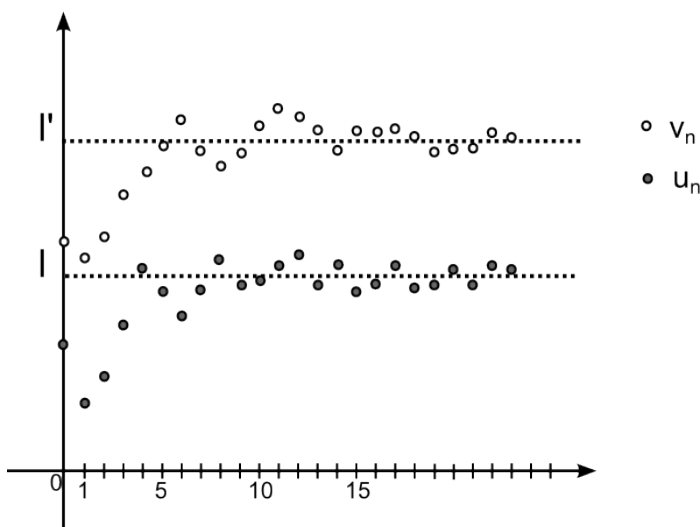
- A partir d'un certain rang

$$u_n \leq v_n$$

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$

Alors

$$l \leq l'$$



Exemple

Soit (u_n) une suite convergente telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $0 \leq u_n \leq 2 + \frac{1}{n+1}$.

Notons l la limite de la suite (u_n) .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{n+1} = 2 \quad \text{donc} \quad 0 \leq l \leq 2$$

Remarque

Avec les mêmes hypothèses mais en remplaçant $u_n \leq v_n$ par $u_n < v_n$ la conclusion reste $l \leq l'$ (et non $l < l'$).

Les inégalités strictes deviennent larges par passage à la limite.

En effet prenons comme exemple $u_n = -\frac{1}{n+1}$ et $v_n = \frac{1}{n+1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$ et pourtant les deux suites convergent vers 0.

4.4 Théorème de la limite monotone

Proposition : Théorème de la limite monotone

- Toute suite croissante et majorée converge.
- Toute suite décroissante et minorée converge.

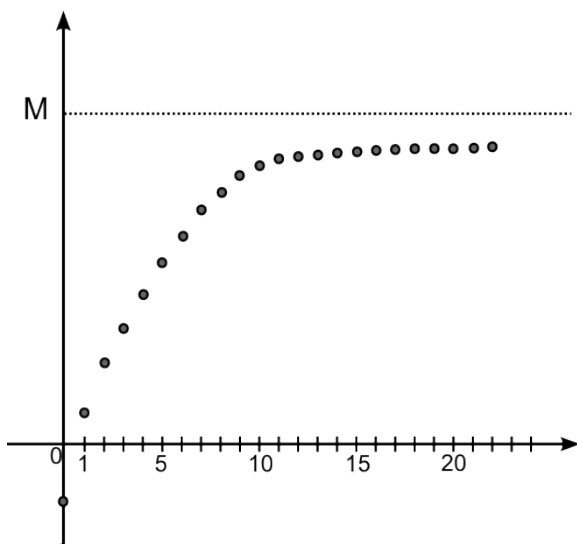
Remarques

1. On déduit du théorème que :

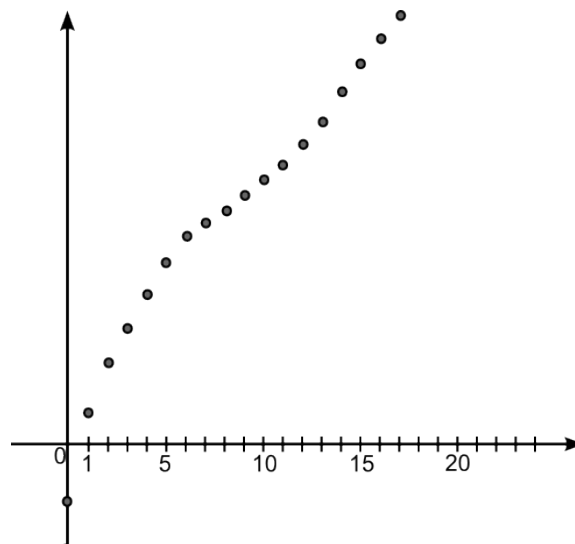
- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante :
 - Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée et alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite finie
 - soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante :
 - Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée et alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite finie
 - soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$

2. Attention ce théorème donne l'existence de la limite de la suite (u_n) mais pas sa valeur.

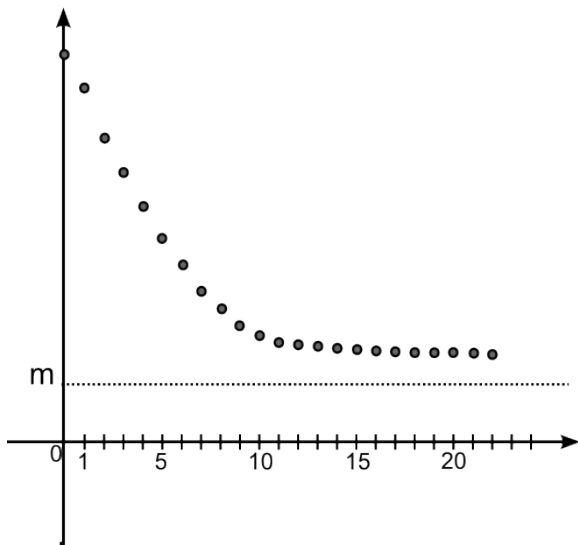
Une suite croissante majorée ne converge pas forcément vers le majorant trouvé.



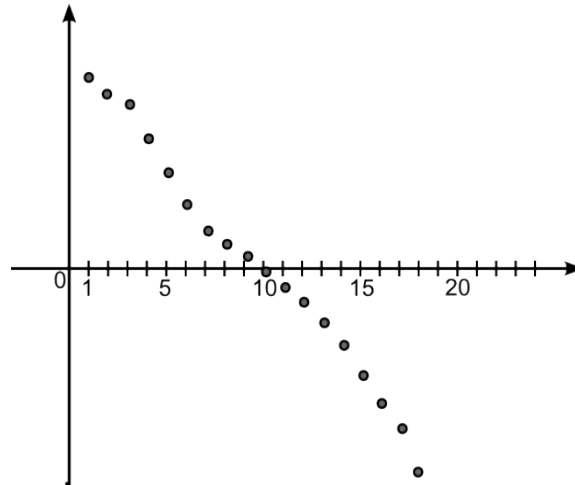
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

Exercice 23 :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = \frac{2}{3} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n$$

1. (a) Calculer u_2 et u_3 .
- (b) Compléter le programme Python ci-dessous qui prend en entrée la valeur de n et renvoie la valeur de u_n .

```

1. def suite(n)
2.     u=2/3
3.     for k in range(2,n+1)
4.         u=...
5.     return u

```

2. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$$

3. Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente vers un réel ℓ que l'on ne demande pas de calculer ici.
5. Montrer que le réel ℓ vérifie $\ell = \frac{1}{3} \times \ell$
6. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 24 :

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + u_n^2 \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
Que peut-on en déduire pour la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
2. On suppose dans cette question que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admette une limite fine que l'on note ℓ .
Montrer qu'alors ℓ vérifie :

$$\ell = \ell + \ell^2$$

3. En déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$

Suites numériques - limites : exercices

1)

1. Dans chacun des cas suivants, trouver le sens de variation de la suite (u_n) :

$$(a) u_{n+1} = u_n + 2n \quad (b) u_{n+1} = u_n(1 - u_n) \quad (c) u_{n+1} = u_n^2 + 3u_n + 1$$

2. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{n}{n+2} u_n$$

(a) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$$

(b) Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

2) Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la suite (u_n) :

$$(a) u_n = 2n^2 + n \quad (b) u_n = \frac{1}{\sqrt{n+3}} \quad (c) u_n = \frac{n+2}{2n+1} \quad (d) u_n = \frac{n}{2^n}$$

3) Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

$$(a) u_n = -3n^2 - n + 8 \quad (b) u_n \left(5 + \frac{2}{n}\right) (n-7) \quad (c) u_n = \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{5}{\sqrt{n}} - 1 \quad (d) u_n = \frac{4 - \frac{5}{n}}{6 + \frac{1}{n+1}}$$
$$(e) u_n = \frac{7n-2}{3n^2+6} \quad (f) u_n = \frac{2n^2+n-5}{6n+1} \quad (g) u_n = \frac{(n+1)(3-n)}{2n^2+1}$$

4) Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

$$(a) u_n = 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad (b) u_n = 7^n - 4^n \quad (c) u_n = \frac{5^n + 1}{2^n - 2} \quad (d) u_n = -2n + \left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

5) Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ en sachant que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(a) 0 \leq u_n - 6 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad (b) u_n \leq -n^2 + n - 1 \quad (c) \frac{2n^2}{(n+1)^2} \leq u_n \leq \frac{2n^2+3}{n^2+1} \quad (d) u_n \geq \sqrt{n}$$

6) Quelle est la valeur de l'entier affichée après exécution du script Python suivant ?

```
1. n=0
2. while 1/2**n>0.001 :
3.     n=n+1
4. print(n)
```

7) On considère le script **Python** suivant :

```
1. n = 1
2. c = 1-(2**n-1)/3**(n-1)
3. while c < 0.95 :
4.     n = n + 1
5.     c = 1-(2**n-1)/3**(n-1)
6. print(n)
```

Après exécution, on obtient l'affichage suivant :

11.

Interpréter le résultat.

8) On considère les suites réelles u et v définies par leur premier terme $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}v_n - \frac{3}{4} \\ v_{n+1} = u_n + \frac{5}{4}v_n - \frac{3}{4} \end{cases} \quad (1)$$

1. Compléter le scripte **Python** suivant qui permet de déterminer u_n et v_n pour une valeur n entrée par l'utilisateur.

```
1. n=int(input('entrer la valeur de n :'))
2. u=....
3. v=....
4. for k in range(....) :
5.     a=u
6.     u=....
7.     v=....
8. print(u,v)
```

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} w_n &= u_n + v_n + 6 \\ t_n &= u_n + \frac{1}{2}v_n + \frac{3}{2} \end{cases} \quad (2)$$

2. Montrer que les suites $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi définies sont des suites géométriques dont on précisera le premier terme et la raison.
3. Déterminer w_n et t_n en fonction de l'entier n .
4. Montrer que les suites $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes et donner leur limite.
5. A l'aide du système (2) exprimer, pour tout entier naturel n , u_n et v_n en fonction de w_n et t_n .
6. En déduire la convergence des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et donner leur limite.

9) On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{Pour tout entier naturel } n, & u_{n+1} = 2u_n + n - 1 \end{cases}$$

1. Complétez le script scilab suivant qui prend en entrée un entier n et qui renvoie la valeur de u_n

```
1. n=int(input('entrer la valeur de n :'))
2. u=...
3. for k in range(...):
4.     ....
5.print(u)
```

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n , $u_n \geq n$.

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On pose pour tout entier naturel n , $v_n = n + u_n$.

(a) Exprimer v_{n+1} en fonction de n et u_n .

(b) En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique et exprimer, pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n uniquement.

(c) Montrer enfin que pour tout entier naturel n , $u_n = 2^n - n$.

10)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.

2. Montrer que la suite (u_n) est monotone et en déduire qu'elle converge .
On notera l sa limite.

3. Montrer que l vérifie $l = 2 - \frac{1}{l}$.

4. En déduire la limite de la suite (u_n) .

5. compléter le programme **Python** suivant afin qu'il affiche le plus petit entier n tel que $u_n - 1 \leq 0.01$

```
1. n=0
2. u=2
3. while .... :
4.     n=....
5.     u=....
6.print(n)
```

11) Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ deux suites définies par :

$$u_0 = 0, v_0 = 1 \text{ et } \forall n \geq 0, u_{n+1} = u_n + v_n \text{ et } v_{n+1} = u_n$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , u_n et v_n sont positifs.

2. Etablir, pour tout entier naturel n , la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

3. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

4. Montrer à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

12) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que : pour tout $x \geq 0$,

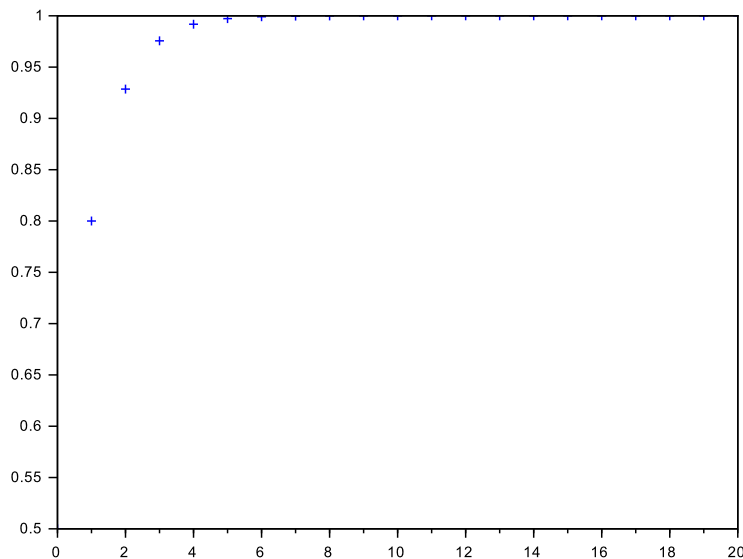
$$f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$$

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$, et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. (a) Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il mémorise les valeurs u_0 à u_{20} et qu'il représente graphiquement ces termes.

```
1. import numpy as np
2. import matplotlib.pyplot as plt
3. x=np.arange(21)
4. u=np.zeros(21)
5. u[0]=....
6. for k .... :
7.     u[k]=....
8. plt.plot(x,u,'ko')
```

- (b) L'exécution du programme amène le graphique ci-contre.



Que pouvez-vous conjecturer sur le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et sur sa limite ?

2. (a) On note f' la fonction dérivée de f . Calculer pour tout réel $x \geq 0$, $f'(x)$.
(b) Dresser le tableau de variation de f en précisant les limites aux bornes de l'ensemble de définition. Placer les réels 1 et $f(1)$ dans ce tableau.
3. (a) Montrer que pour tout entier naturel n , le réel u_n appartient à l'intervalle $[0, 1]$.
(b) Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante. En déduire que cette suite est convergente.
(c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

13)

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = \frac{2}{3} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n$$

1. (a) Calculer u_2 et u_3 .
Les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.
(b) Compléter le programme Python ci-dessous qui prend en entrée la valeur de n et renvoie la valeur de u_n .

```
1. def suite(n)
2.     u=2/3
3.     for k in range(2,n+1)
4.         u=...
5.     return u
```

2. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$$

3. (a) Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente vers un réel ℓ . Déterminer la valeur de ℓ .
4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{u_n}{n}$.
(a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
(b) En déduire pour tout entier naturel n non nul, l'expression de v_n en fonction de n .
(c) On considère la suite (S_n) définie par : $\forall n \geq 1, S_n = \sum_{k=1}^n v_k$.
Montrer que la suite (S_n) est convergente et déterminer sa limite.

14)

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$, à valeur réelles, telle que :

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)$$

- (a) Dresser le tableau de variation de la fonction f .
(b) Etudier la convexité de la fonction f .
(c) Etudier le signe de $f(x) - x$ sur $]0; +\infty[$.
2. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite réelle définie par :

$$u_0 > 1 \text{ et pour tout entier } n \geq 1, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{1}{u_n} \right)$$

- (a) Montrer que pour tout entier n on a $u_n \geq 1$
(b) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$
(c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

15) Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ deux suites définies par :

$$u_1 = 1, v_1 = 2 \text{ et } \forall n \geq 1, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}$$

1. Vérifier que $u_2 = \frac{1}{3}$ et $v_2 = \frac{4}{3}$, puis calculer u_3 et v_3 .
2. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
3. Montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont décroissantes et convergentes.
4. On pose : $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\ell' = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$
 - (a) Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n \geq 1}$ est constante et en déduire une relation entre ℓ et ℓ' .
 - (b) En utilisant la relation $u_{n+1}(u_n + v_n) = u_n^2$ montrer que $\ell\ell' = 0$
 - (c) Déterminer ℓ et ℓ'
5. Recopier et compléter les lignes (6) et (7) du programme Python suivant afin qu'il calcule et affiche les valeurs de u_n et v_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
1. n=int(input('entrer la valeur de n :'))
2. u=1
3. v=2
4. for k in range(2,n+1):
5.     a=u
6.     u=....
7.     v=....
8.print(u,v)
```

6. (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n + 1}$.
- (b) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} \leq \frac{1}{3}u_n$
- (c) Montrer par récurrence que $n \geq 1$, $u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.
- (d) Retrouver le résultat de la question 4.c