CHAPITRE 4 : COUPLE DE VARIABLES ALEATOIRES

I- LOI CONJOINTE -LOI MARGINALE

1- DÉFINITION

On désigne par I et J deux sous ensembles finis de $\mathbb{N}$.
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes définies sur un même espace probabilisé.
On note $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_i,\ i \in J\} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$

On appelle **loi du couple** (X, Y) ou **loi conjointe** de X et Y l'ensemble des couples (x_i, y_j) tel que $x_i \in X(\Omega)$, $y_j \in Y(\Omega)$ et $\forall (i,j) \in I \times J$ $p_{ij} = P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$

Remarque 1:
On présentera les résultats sous forme d'un tableau à double entrée.

Remarque 2:
Comme pour les lois de probabilités la première chose à faire sera de déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ puis de " calculer " toutes les valeurs de $P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$

En général $P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \neq P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$

2- EXEMPLE

Une urne contient trois jetons numérotés 1,2 et 3.
On tire 2 jetons successivement sans remise
On note X la variable aléatoire égale au numéro du premier jeton tiré et Y la variable aléatoire égale au deuxième jeton tiré.
Déterminer la loi de (X, Y)

D'où le tableau

X \ Y	1	2	3	
1				
2				
3				

<u>Remarque 2</u> :
Comme vous pouvez le constater il peut y avoir des cases où la probabilité est 0.

<u>Remarque 3</u> :

On vérifie que $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$

Il est plus astucieux de sommer les totaux des lignes et les totaux des colonnes.

Mais que représente ces totaux ?

3- <u>LOI MARGINALE</u>

Si j'observe la première ligne on a :

$$\boldsymbol{P(X=1)}\cap(Y=1)+\boldsymbol{P(X=1)}\cap(Y=2)+\boldsymbol{P(X=1)}\cap(Y=3)=\frac{2}{6}$$

$(Y=1),(Y=2),(Y=3)$ forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$\boldsymbol{P(X=1)=}P(X=1)\cap(Y=1)+P(X=1)\cap(Y=2)+P(X=1)\cap(Y=3)=\frac{2}{6}$$

donc la dernière colonne donne la loi de X
et de manière identique la dernière ligne donne la loi de Y

Soit (X,Y) un couple de VAR discrètes. La loi de X est appelée la **première loi marginale** du couple (X,Y) et la loi de Y est appelée la **deuxième loi marginale** du couple (X,Y).

Si on connaît la loi du couple (X,Y) on peut en déduire les lois marginales mais la réciproque est fausse.
Si les deux VAR sont indépendantes alors des lois marginales on peut en déduire la loi conjointe car $P\big((X=x_i)\cap(Y=y_j)\big) = P(X=x_i)\times P(Y=y_j)$

Exemple 2

Soit X et Y deux VAR à valeurs dans $\{-1\ ;0\ ;1\}$. La loi du couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant :

D'où le tableau

X \ Y	-1	0	1
-1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
0	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$
1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$

Déterminer les lois marginales de X et Y puis $E(X)$, $V(X)$ et $E(Y)$

X \ Y	-1	0	1	loi de
-1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	
0	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	
1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	
loi de				

Loi de X

x_i	-1	0	1	total
p_i				
$x_i p_i$				
$x_i^2 p_i$				

$E(X) =$

.

$E(X^2) =$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 =$

Loi de Y

y_i	-1	0	1	total
p_i				
$y_i p_i$				

donc $E(Y) =$.

II- COVARIANCE

1- APPROCHE

Soient X et Y deux VAR pas forcément indépendantes
$V(X+Y)=$

On note $\operatorname{cov}(X,Y)$ =

Soit (X,Y) un couple de VAR discrète finie.
$V(X+Y)=$

$V(X-Y)=$

2- DÉFINITION

Soit (X,Y) un couple de VAR discrète finie.
On appelle covariance de (X,Y) le nombre noté $\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY)-E(X)E(Y)$

Remarque 1 :
Pour calculer la covariance, on utilise la formule pratique :

$$\mathbf{cov(X,Y) = E(XY)-E(X)E(Y)}\ .$$

où $E(XY)=\sum_{i,j} x_i y_j P(X=x_i)\cap(Y=y_j)$

Exemple :
Dans l'exemple 2 , calculer $E\,(X,Y)$

$E(XY)=(-1)(-1)\,\frac{1}{5}+(-1)\times 0\times 0+(-1)\times 1\times\frac{1}{5}+0\times(-1)\times\frac{1}{15}+0\times 0\times\frac{1}{15}$

$+0\times 1\times\frac{1}{15}+1\times(-1)\,\frac{1}{5}+1\times 0\times 0+1\times 1\times\frac{1}{5}=0$

$\operatorname{Cov}(X,Y) = E(XY)-E(X)E(Y) = 0-0\times 0=0$

3- PROPRIÉTÉS DE LA COVARIANCE

Soient X, Y et Z trois VAR , a,b,c,d quatre réels :

- $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$
- $Cov(X,X)=V(X)$
- $Cov(X+Z,Y)=Cov(X,Y)+Cov(Z,Y)$
- $Cov(aX+b,cY+d)=ac\,Cov(X,Y)$

4- COEFFICIENT DE CORRÉLATION LINÉAIRE

On appelle coefficient de corrélation linéaire de X et Y le nombre noté ρ

$$\rho(X,Y)=\frac{\mathrm{cov(X,Y)}}{\sigma(\mathrm{X})\times\sigma(\mathrm{Y})}$$

Remarques :

- On a $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$
- Si ce coefficient est proche de 1 ou -1, on dit que les variables X et Y sont fortement corrélées

III- INDÉPENDANCE

1- DÉFINITION

Soit X et Y deux V.A.R. sur un même espace probabilisé (Ω, P) .
X et Y sont dites indépendantes si pour toute valeur x_i prise par X et pour toute valeur y_i prise par Y on a $P(\ (X=x_i) \cap (Y=y_i)\ )= P\ (X=x_i) \times P\ (Y=y_i)$

2- MÉTHODE POUR MONTRER QUE DEUX VAR SONT INDÉPENDANTES OU PAS SI ON DISPOSE DE LA LOI CONJOINTE

La méthode n'est pas la même si on veut montrer que X et Y sont indépendantes ou si on veut montrer qu'elles ne sont pas indépendantes.

- Pour montrer que X et Y sont indépendantes, on montre (en faisant deux calculs séparés) que $P(\ (X=x_i) \cap (Y=y_j)\ )= P\ (X=x_i) \times P\ (Y=y_j)$ pour tous les i et j comme on l'a déjà fait au chapitre indépendance.

- Pour montrer que X et Y ne sont pas indépendantes, il suffit de trouver un i et un j tel que $P(\ (X=x_i) \cap (Y=y_j)\ ) \neq P\ (X=x_i) \times P\ (Y=y_j)$
  Lorsque c'est possible, il est intéressant de chercher i et j tels que $P(\ (X=x_i) \cap (Y=y_j)\ ) = 0$
  et $P\ (X=x_i) \neq 0$ et $P\ (Y=y_j) \neq 0$

Exemple
Dans l'exemple 2, les variables X et Y sont$-$elles indépendantes ?
On a ,d'après le tableau de la loi conjointe , $P(\ (X=-1) \cap (Y=0)\ ) = 0$
$P(X=-1) = \dfrac{2}{5}$ et $P(Y=0)=\dfrac{1}{15}$ et par suite $P(\ (X=-1) \cap (Y=0)\ ) \neq P(X=-1) \times P(Y=0)$.
Donc X et Y sont dépendantes.

3- PROPRIÉTÉS

Rappel : $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ et $E(aX+b)=aE(X)+b$

Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY)=E(X)E(Y)$

Si $E(XY)=E(X)E(Y)$ alors X et Y ne sont pas forcément indépendantes ! ! !

Par contre si $E(XY) \neq E(X)E(Y)$ alors on peut affirmer que X et Y ne sont pas indépendantes.

Rappel : $V(aX+b)=a^2V(X)$

Si X et Y sont indépendantes, alors

$\boldsymbol{cov(X,Y)=}$

$\boldsymbol{V(X+Y)=}$

$\boldsymbol{V(X-Y)=}$