

Programme de colle n° 1

à partir du lundi 22 septembre

• Chapitres pouvant faire l'objet d'exercices

- Matrices
- Continuité et solutions d'équations

• Question de cours/exercices à préparer

Les exercices doivent être préparés avant la colle.

(Q1) Soit $A := \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. On pose $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer N^2 . Que vaut N^k pour $k \geq 2$.
2. A l'aide de la formule du binôme de Newton, les coefficients de A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. La formule est-elle encore valable pour $n = 0$?

(Q2) Soit $A := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3 .
2. Conjecturer la forme de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Démontrer cette conjecture en faisant une preuve par récurrence.

(Q3) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $u_0 = 1$ et $v_0 = -2$. On suppose que pour

tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \end{cases}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice A pour laquelle : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n$.
2. Etablir par récurrence la formule suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0$.
3. On admet que pour tout $n \geq 0$, $A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3^n}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{3^n}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{3^n}{2} & \frac{1}{2} + \frac{3^n}{2} \end{pmatrix}$.

En déduire l'expression de u_n et v_n pour tout entier naturel n .

(Q4) Mériadec présente sa candidature à 12 entreprises différentes qui répondent indépendamment les unes des autres : 4 candidatures pour un poste de gardien de phare, et 8 pour un poste de crêpier. La probabilité que sa candidature débouche sur un entretien est de $1/10$ pour les postes de gardien de phare et de $1/5$ pour les postes de crêpier. Miracle : toutes ses lettres reçoivent une réponse !

Mériadec ouvre une lettre de réponse au hasard sans savoir l'entreprise qui l'a adressée. On note :

E « La lettre de réponse propose un entretien. »

C « La lettre provient d'une entreprise dans laquelle Mériadec souhaite occuper une position crêpier. »

G « La lettre provient d'une entreprise dans laquelle Mériadec souhaite occuper une position de gardien de phare. »

1. Quelle est la probabilité que Mériadec obtienne un entretien en ouvrant une lettre ?
2. Mériadec ouvre toutes les lettres (de manière indépendante les unes des autres). Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'entretiens qu'il obtient à l'issue de sa lecture.
 - (a) Quelle est la loi de X ? Donner $\mathbf{P}(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
 - (b) Quelle est la probabilité que Mériadec n'obtienne aucun entretien ? au moins un entretien ?
 - (c) En moyenne, combien d'entretiens Mériadec obtient-il ?
 - (d) Calculer $V(X)$ et $V(1 - 2X)$.

(Q5) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = x - \ln(x)$.

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f admet-elle un minimum ? Un maximum ?
3. Étudier la convexité/concavité de f .
4. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle à déterminer.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $[1, +\infty[$. On la note α .
6. Établir que $3 < \alpha < 4$.

Valeurs numériques. On donne $\ln(3) \approx 1,1$ et $\ln(2) \approx 0,7$