

Programme de colle n° 1

à partir du lundi 21 septembre

— **Chapitres pouvant faire l'objet d'exercices**

— Matrices

— **Question de cours/exercices à préparer**

*Les exercices doivent être préparés **avant** la colle.*

(Q1) Soit $A := \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. On pose $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer N^2 . Que vaut N^k pour $k \geq 2$.
2. A l'aide de la formule du binôme de Newton, les coefficients de A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. La formule est-elle encore valable pour $n = 0$?

(Q2) Soit $A := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Recopier et compléter le programme Python suivant afin qu'il prenne en entrée un entier $n \geq 1$ et donne la valeur de A^n .

```
1 import numpy as np
2 def power(n):
3     A = .....
4     An = .....
5     for k in range(..., ...):
6         An = ....
7     return An
```

2. Calculer A^2 et A^3 .
3. Conjecturer la forme de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Démontrer cette conjecture en faisant une preuve par récurrence.

(Q3) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $u_0 = 1$ et $v_0 = -2$. On suppose que

pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \end{cases}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice A pour laquelle : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n$.
2. Etablir par récurrence la formule suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0$.
3. On admet que pour tout $n \geq 0$, $A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3^n}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{3^n}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{3^n}{2} & \frac{1}{2} + \frac{3^n}{2} \end{pmatrix}$.
En déduire l'expression de u_n et v_n pour tout entier naturel n .
4. Déterminer la limite de u_n et de v_n .

(Q4) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$A^n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3^{n+1} - (-2)^{n+1} & 2 \times 3^{n+1} + 3 \times (-2)^{n+1} \\ 3^n - (-2)^n & 2 \times 3^n + 3 \times (-2)^n \end{pmatrix}.$$

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par ses deux premiers termes $u_0 = -\frac{1}{2}$ et $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n , par la relation : $u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n + 3$.

On pose $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n , $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel n on a $X_{n+1} = AX_n + B$.
- (b) Recopier et compléter le programme Python suivant afin qu'il prenne en entrée un entier $n \geq 2$ et donne la valeur de u_n .

```

1  import numpy as np
2  def eval(n):
3      A = .....
4      B = .....
5      X = .....
6      for k in range(..., ...):
7          X = ....
8      return ....

```

- (c) Vérifier que $AL + B = L$.
- (d) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $X_n = A^n(X_0 - L) + L$.
- (e) Dédire des questions précédentes que pour tout entier naturel n on a :

$$u_n = \frac{3}{10}(3^n - (-2)^n) - \frac{1}{2}.$$

(Q5) Mériadec présente sa candidature à 12 entreprises différentes qui répondent indépendamment les unes des autres : 4 candidatures pour un poste de gardien de phare, et 8 pour un poste de crêpier. La probabilité que sa candidature débouche sur un entretien est de $1/10$ pour les postes de gardien de phare et de $1/5$ pour les postes de crêpier. Miracle : toutes ses lettres reçoivent une réponse !

Mériadec ouvre une lettre de réponse au hasard sans savoir l'entreprise qui l'a adressée. On note :

E « La lettre de réponse propose un entretien. »

C « La lettre provient d'une entreprise dans laquelle Mériadec souhaite occuper une position crêpier. » G « La lettre provient d'une entreprise dans laquelle Mériadec souhaite occuper une position de gardien de phare. »

1. Quelle est la probabilité que Mériadec obtienne un entretien en ouvrant une lettre ?
2. Mériadec ouvre toutes les lettres (de manière indépendante les unes des autres). Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'entretiens qu'il obtient à l'issue de sa lecture.
 - (a) Quelle est la loi de X ? Donner $\mathbf{P}(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
 - (b) Quelle est la probabilité que Mériadec n'obtienne aucun entretien ? au moins un entretien ?
 - (c) En moyenne, combien d'entretiens Mériadec obtient-il ?
 - (d) Calculer $V(X)$ et $V(1 - 2X)$.