

Programme de colle n°2

à partir du lundi 5 octobre

- **Chapitres pouvant faire l'objet d'exercices**

- Continuité sur un intervalle, méthode de dichotomie en Python
- Couple de variables aléatoires

- **Exercices à préparer**

Les exercices doivent être préparés **avant** la colle.

(Q1) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. On pose $N = A - 3I$.

1. Écrire une fonction Python **power** qui prenne en entrée un entier $n \geq 1$ et renvoie A^n .
2. Calculer N^3 . Que vaut N^k pour $k \geq 3$?
3. En donnant le détail des calculs, simplifier $\binom{n}{2}$ pour $n \geq 2$.
4. À l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer les coefficients de A^n , pour tout $n \geq 2$.
5. La formule est-elle encore valable pour $n = 0$ et $n = 1$?

(Q2) **Théorème de la bijection monotone, méthode de dichotomie.** Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$x \in, \quad f(x) = -x^3 + x + 1.$$

1. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. À l'aide du théorème de la bijection monotone, montrer que f réalise une bijection de $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$ sur un ensemble à déterminer.
3. Montrer que l'équation $f(x) = -3$ admet exactement une solution α sur $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$.
4. Montrer que $\alpha \in]1, 2[$.
5. (a) Compléter le programme Python suivant afin qu'il donne une approximation de α à 10^{-2} près :

```
1 def f(x):
2     y = .....
3     return y
4 a = ...
5 b = ...
6 while .....:
7     c = ....
8     if f(c) < -3:
9         ... = c
10    else:
11        ... = c
12 print(...)
```

- (b) **Faire un schéma clair et détaillé** qui justifie l'affectation des variables lignes 9 et 11 (on reprntera le cas qui correspond à $f(c) < -3$).

(Q3) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites. On suppose que $u_1 = 1$ et $v_1 = 2$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n \\ v_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n \end{cases}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice A pour laquelle :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_{n+1} = AU_n.$$

2. Établir par récurrence la formule suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n = A^{n-1}U_1.$$

3. On admet que pour tout $n \geq 0$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - 2^{n-1} \\ \frac{1}{2} - 2^{n-1} & 2^{n-1} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

En déduire l'expression de u_n et v_n pour tout entier naturel n non nul.

(Q4) Connaître et manipuler les formules (1). Soient X et Y deux variables aléatoires finies et β un réel positif. On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par ce tableau.

$X \backslash Y$	1	2	3
0	2β	3β	3β
1	3β	2β	3β
2	3β	?	2β

- On donne $\mathbb{P}(Y = 2) = 8\beta$. Déterminer en fonction de β la valeur manquante dans le tableau afin qu'il puisse effectivement représenter la loi du couple (X, Y) .
- Déterminer la valeur de β pour que ce tableau puisse effectivement représenter la loi du couple (X, Y) .
- Déterminer les lois marginales de (X, Y) . Déterminer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$.
- Calculer $\mathbb{E}[XY]$ puis $\text{Cov}(X, Y)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

(Q5) Connaître et manipuler les formules (2). Soient X et Y deux variables aléatoires finies. On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par ce tableau.

$X \backslash Y$	1	2	3
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

- Déterminer la loi de la variable aléatoire $X + Y$. En reconnaissant une loi usuelle, donner $\mathbb{E}[X + Y]$ et $V(X + Y)$.
- Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y - X$. Calculer $\mathbb{E}[Y - X]$ et $V(Y - X)$.
- (a) Rappeler les identités remarquables pour $V(X + Y)$ et $V(Y - X)$. Déduire de ce qui précède $\text{Cov}(X, Y)$.
(b) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
- (a) À l'aide des valeurs de $\mathbb{E}[X + Y]$ et $\mathbb{E}[Y - X]$, déterminer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$.
Indication : Se ramener à un système linéaire par linéarité de l'espérance, puis le résoudre.
(b) Calculer $\mathbb{E}[XY]$, sans utiliser le tableau de lois conjointes.