

Devoir maison n° 1

On considère la fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, définie pour tout $x \in]0, +\infty[$, par :

$$f(x) = e^x - e \ln(x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f .

On admet $e \approx 2,7$, $e^2 \approx 7,3$ et $\ln(2) \approx 0,7$.

1. (a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout réel $x \in]0, +\infty[$.
 (b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ et $f'(1)$.
 (c) Étudier le signe de f'' sur $]0, +\infty[$. En déduire le tableau de variations de f' .
 On fera apparaître les résultats obtenus à la question précédente.
 (d) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $f(1)$.
Indication. Pour l'étude en $+\infty$, on pourra utiliser : $\frac{\ln(x)}{e^x} = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{x}{e^x}$.
 (e) Déduire de ce qui précède le tableau de variations de f . On fera apparaître les résultats obtenus à la question précédente.
2. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .
3. (a) Soit D la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = 2$. Donner l'équation de D .
 (b) Donner les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et D .

On considère la fonction $u :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, définie pour tout $x \in]0, +\infty[$, par :

$$u(x) = f'(x) - x.$$

4. (a) Étudier les variations de u sur $]0, +\infty[$.
 (b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$.
 (c) Déduire de ce qui précède que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$. On la note α .
 (d) Montrer l'encadrement $1 < \alpha < 2$.
 (e) Écrire un programme Python permettant de déterminer une approximation de α à 10^{-4} près à l'aide de la méthode de dichotomie.
5. (a) Montrer que $h(x) = x \ln(x) - x$ est une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
 (b) En déduire la valeur de $\int_1^2 f(x) dx$.
 (c) Hachurer sur le graphe de la question 2. la surface ayant pour aire algébrique $\int_1^2 f(x) dx$.

On considère la fonction $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, définie pour tout $x \in]0, +\infty[$, par :

$$g(x) = f(x) - x.$$

6. (a) Démontrer que $g'(2) > 0$ et $g(2) > 0$.
 (b) Démontrer que $f'' = g''$. En déduire que f' et g' ont les mêmes variations. En déduire le tableau de signes de g' sur $[2, +\infty[$.
 (c) Dresser le tableau de variations de g sur $[2, +\infty[$. En déduire que g est strictement positive sur $[2, +\infty[$.

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

7. (a) Calculer u_1 puis démontrer que $u_1 \geq 2$.
 (b) Démontrer par récurrence, que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$2 \leq u_n \leq u_{n+1}.$$

Quelle est la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

- (c) Lorsque n tend vers $+\infty$, quels sont les deux comportements possibles de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et selon quel théorème ?

On suppose **par l'absurde** que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel, notée ℓ .

8. (a) Justifier alors que ℓ vérifie la relation $\ell = f(\ell)$.
 (b) A l'aide des résultats de la question 6. (c), aboutir à une absurdité. Conclure quant au comportement de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
9. Écrire un programme Python, qui, étant donné un réel $A > 2$ entré par l'utilisateur, renvoie le plus petit entier naturel N pour lequel $u_N \geq A$.