Programme de colle n°3

à partir du lundi 2 novembre

— **Chapitres pouvant faire l'objet d'exercices**

— Séries numériques

— **Questions de cours / exercices à préparer**

*Les exercices doivent être préparés **avant** la colle.*

(Q1) 1. On étudie la série $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} \frac{3^{n+m_1}}{(-5)^{n+m_2}}$ où $n_0 \in \{1,2\}$, $m_1 \in \{-1,1\}$ et $m_2 \in \{-2,2\}$ sont choisis par le colleur.

Démontrer que la série est convergente et déterminer $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{3^{n+m_1}}{(-5)^{n+m_2}}$.

2. On étudie la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n}{4^{n+m_1}n!}$ où $m_1 \in \{-1,1\}$ est choisi par le colleur.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappeler l'expression de S_n, somme partielle d'indice n de la série.

(b) Démontrer que la série est convergente et déterminer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{4^{n+m_1}n!}$.

(Q2) On étudie la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappeler l'expression de S_n, somme partielle d'indice n de la série.
2. Déterminer trois réels a, b et c pour lesquels on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+2} + \frac{c}{k+3}.$$

Indication : Utiliser la méthode d'identification puis utiliser la méthode du pivot de Gauss pour résoudre le système linéaire ainsi obtenu.

3. En déduire une expression simple de S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

(Q3) On étudie la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$. On note S_n sa somme partielle d'indice n.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in [\![n^2+1, (n+1)^2]\!]$, on a :

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \frac{1}{n}.$$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{2n+1}{n+1} \leq S_{(n+1)^2} - S_{n^2} \leq \frac{2n+1}{n}.$$

3. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

(Q4) On étudie la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$. On note S_n sa somme partielle d'indice n.

Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_k=\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$.

1. Montrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et tout $t\in[k,k+1]$, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}\leq\dfrac{1}{\sqrt{t}}\leq\dfrac{1}{\sqrt{k}}$.
   En déduire un encadrement de I_k.
2. En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,
$$2\sqrt{n+1}-2\leq S_n\leq 2\sqrt{n}-1.$$
   Indication. Démontrer chaque inégalité séparément en sommant de $k=1$ à n à droite et de $k=1$ à $n-1$ à gauche.
3. Conclure quant à la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$.
4. Quelle est la limite de $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$?

(Q5) On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :
$$u_1=\frac{1}{2},\qquad \forall n\geq 1,\quad u_{n+1}=u_n-u_n^2.$$

1. Montrer que, pour tout entier $n\geq 1$,
$$0\leq u_{n+1}\leq u_n\leq\frac{1}{2}.$$
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge, puis déterminer sa limite.
3. Démontrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}u_n^2$ est convergente et déterminer sa somme.