Programme de colle n° 2

à partir du lundi 7 octobre

- **Chapitres pouvant faire l'objet d'exercices**
  - Continuité sur un intervalle, méthode de dichotomie en Python
  - Couple de variables aléatoires

- **Question de cours/exercices à préparer**

  *Les exercices doivent être préparés **avant** la colle.*

(Q1) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. On pose $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer N^3. Que vaut N^k pour $k \geqslant 3$.
2. En donnant le détail des calculs, simplifier $\binom{n}{2}$ pour $n \geqslant 2$.
3. A l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer les coefficients de A^n, pour tout $n \geqslant 2$.

(Q2) **Théorème de la bijection monotone, méthode de dichotomie.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = -x^3 + x + 1.$$

1. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. A l'aide du théorème de la bijection monotone, montrer que f réalise une bijection de $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$ sur un ensemble à déterminer.
3. Montrer que l'équation $f(x) = -3$ admet exactement une solution α sur $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$.
4. Montrer que $\alpha \in]1, 2[$.
5. (a) Compléter le programme Python suivant afin qu'il donne une approximation de α à 10^{-2} près :

```
def fonction(x):
    y=.........
    return y
a=...
b=...
while .................:
    c=....
    if fonction(c)<-3:
        ...=c
    else:
        ...=c
print(...)
```

   (b) **Faire un schéma clair et détaillé** qui justifie le choix de `a` et `b` dans le cas de figure qui correspond à `fonction(c)<-3`.

(Q3) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites. On suppose que $u_1 = 1$ et $v_1 = 2$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n \\ v_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n \end{cases}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice A pour laquelle :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} = AU_n,$$
2. Etablir par récurrence la formule suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = A^{n-1}U_1.$$
3. On admet que pour tout $n \geqslant 0$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} + \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} - 2^{n-1} \\ \dfrac{1}{2} - 2^{n-1} & 2^{n-1} + \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.
En déduire l'expression de u_n et v_n pour tout entier naturel n non nul.

(Q4) **Connaître et manipuler les formules (1).** Soient X et Y deux variables aléatoires finies et β un réel positif. On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par ce tableau.

$X \backslash Y$	1	2	3
0	2β	3β	3β
1	3β	2β	3β
2	3β	?	2β

1. On donne $\mathbf{P}(Y = 2) = 8\beta$. Déterminer en fonction de β la valeur manquante dans le tableau afin qu'il puisse effectivement représenter la loi du couple (X, Y).
2. Déterminer la valeur de β pour que ce tableau puisse effectivement représenter la loi du couple (X, Y).
3. Déterminer les lois marginales de (X, Y). Déterminer $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{E}[Y]$.
4. Calculer $\mathbf{E}[XY]$ puis $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

(Q5) **Connaître et manipuler les formules (2).** Soient X et Y deux variables aléatoires finies. On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par ce tableau.

$X \backslash Y$	1	2	3
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X+Y$. En reconnaissant une loi usuelle, donner $\mathbf{E}[X+Y]$ et $V(X+Y)$
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y - X$. Calculer $\mathbf{E}[Y - X]$ et $V(Y - X)$.
3. (a) Rappeler les identités remarquables $V(X + Y)$ et $V(Y - X)$. Déduire de ce qui précède $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
   (b) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. (a) A l'aide des valeurs de $\mathbf{E}[X + Y]$ et $\mathbf{E}[Y - X]$, déterminer $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{E}[Y]$.
   Indication. Se ramener à un système linéaire puis le résoudre.
   (b) Calculer $\mathbf{E}[XY]$, sans utiliser le tableau de lois conjointes.