Programme de colle n° 4

à partir du lundi 25 novembre

- **Chapitres pouvant faire l'objet d'exercices**
  - Matrices inversibles, y compris inversibilité de matrices de taille 3.

- **Question de cours/exercices à préparer**

  Les exercices doivent être préparés ***avant*** *la colle.*

(Q1) Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, $z_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{2} \\ y_{n+1} = -\dfrac{1}{2}x_n + \dfrac{3}{2}y_n - \dfrac{3}{2}z_n + \dfrac{1}{4} \\ z_{n+1} = \dfrac{3}{2}x_n - \dfrac{3}{2}y_n + \dfrac{3}{2}z_n - \dfrac{1}{4} \end{cases}.$$

On définit par ailleurs les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} a_n = -x_n + y_n + z_n, \\ b_n = x_n \\ c_n = -x_n + y_n - z_n \end{cases}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer x_n, y_n et z_n en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. Montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique. En déduire b_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique. En déduire c_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que $a_1 = 1$ et que pour tout $n \geqslant 2$, $a_n = -\frac{1}{2}$.
5. Déduire de 1., 2., 3. et 4. une expression explicite pour les suites x_n, y_n et z_n pour tout $n \geqslant 2$.

(Q2) Lassé de la pluie, Mériadec va chercher le beau temps en Grèce. Le guide touristique lui dit que sur l'île de Naxos résident trois espèces de monstres antiques : des chimères, des minotaures, et des cyclopes.

On sait qu'avec la population de monstres résidant sur l'île on totalise :
- 46 pattes/jambes (sans compter les bras)
- 28 cornes
- 49 yeux

Mériadec cherche à déterminer le nombre de chimères, minotaures et cyclopes sur l'île de Naxos.

(a) Mettre ce problème sous la forme d'un système linéaire.

(b) Déterminer le nombre de chimères, minotaures et cyclopes sur l'île de Naxos.

(c) Quelle est la matrice associée au système linéaire résolu en (b) ? Montrer soigneusement que cette matrice est inversible (on ne **demande pas de calculer l'inverse**).

Description de la chimère retenue. Hybride avec un corps et une tête de lion, une tête de chèvre sur le dos et une queue se terminant par une tête de serpent.

(Q3) Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $Y_1 = \begin{pmatrix} -15 \\ -2 \\ 20 \end{pmatrix}$ et $Y_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$

(a) Démontrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

(b) Déterminer l'unique solution de $AX = Y_1$, puis $AX = Y_2$.

(c) Sans faire **aucun** produit matriciel supplémentaire, déduire de ce qui précède l'unique solution de $AX = Y_1 + 2Y_2$.

(Q4) Dans cet exercice, on étudie la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{2}{3^n \ln(n)}$.

(a) Rappeler l'expression de la n^{e} somme partielle de la série, notée S_n, pour tout $n \geqslant 3$.

(b) Démontrer que pour tout $k \geqslant 3$, on a : $0 \leqslant \dfrac{2}{3^k \ln(k)} \leqslant \dfrac{2}{3^k}$. En déduire que pour tout $n \geqslant 3$, on a :

$$0 \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{3^{n-2}}\right).$$

(c) Démontrer que $(S_n)_{n\geqslant 3}$ est majorée, et croissante.

(d) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{2}{3^n \ln(n)}$ converge et encadrer la valeur de sa somme.

(Q5) Soient A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P un élément inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $D = P^{-1}AP$.

(a) Déterminer en la démontrant une expression de A en fonction de D et P.

(b) Donner une relation entre A^n, D^n et P valable pour tout $n \geqslant 0$. Démontrer cette relation par récurrence.

(c) **Application.** On donne $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 7 & -3 & 4 \\ 7 & -7 & 8 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Calculer PQ, en déduire que P est inversible et donner son inverse. Calculer A^n sous la forme d'un tableau de réels.