# Programme de colle n° 5

à partir du lundi 8 décembre

- **Chapitres pouvant faire l'objet d'exercices**
  - Variables aléatoires discrètes infinies
  - Lois usuelles discrètes infinies
- **Question de cours/exercices à préparer**
  *Les exercices doivent être préparés* ***avant*** *la colle.*

(Q1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $Y$ une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda$.

1. Justifier que la variable aléatoire $\dfrac{1}{Y+1}$ est bien définie et donner son support.
2. Rappeler l'énoncé du théorème de transfert pour une variable aléatoire discrète infinie $X$ dont le support s'écrit $\{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ et une fonction $g$ définie sur le support de $X$.
3. A l'aide du théorème de transfert, **justifier que** $\dfrac{1}{Y+1}$ admet une espérance et donner la valeur de $\mathbf{E}\left[\dfrac{1}{Y+1}\right]$.

(Q2) Mériadec veut compléter sa collection de cartes Pokémon. Sur les 100 cartes holographiques qui existent, il en possède déjà 97 et il souhaite acquérir les 3 dernières.
Chaque semaine, il achète un paquet de cartes. Chaque paquet contient exactement une carte holographique choisie uniformément parmi les 100 cartes existantes. Chaque paquet coûte 12 euros.
Soit $X$ (rest. $Y$, $Z$) la variable aléatoire égale au nombre de semaines nécessaires à Mériadec pour acquérir sa 98ème (resp. 99ème, 100ème) carte holographique, sans compter le temps qu'il a fallu pour obtenir les 97 (resp. 98, 99) précédentes.
Soit enfin $S$ la variable aléatoire égale à la somme déboursée par Mériadec pour qu'il obtienne ses trois dernières cartes holographiques.

(a) Justifier soigneusement quelle est la loi de $X$.
(b) Donner la loi de $Y$ et de $Z$.
(c) Exprimer $S$ au moyen de $X$, $Y$ et $Z$.
(d) Quelle est la somme moyenne que à Mériadec va débourser pour compléter sa collection ?

(Q3) Mériadec part à Perros-Guirec jouer au « Kasino ». Devant lui se trouvent deux machines à sous, $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$. Il choisit une des deux machines : $\mathcal{M}_1$ avec probabilité $\frac{1}{3}$ et $\mathcal{M}_2$ avec probabilité $\frac{2}{3}$. Il joue ensuite sans discontinuer (on considère sa fortune infinie) sur la machine qu'il a choisie jusqu'à obtenir pour prix un tracteur de collection (un modèle unique). A chaque partie, la probabilité de gagner ce tracteur sur $\mathcal{M}_1$ est de $p_1 \in ]0,1[$ et sur $\mathcal{M}_2$ de $p_2 \in ]0,1[$.
On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de fois que Mériadec joue pour obtenir le tracteur.
On note $M_1$ « Mériadec choisit la machine $\mathcal{M}_1$ » et $M_2$ « Mériadec choisit la machine $\mathcal{M}_2$ ».

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer soigneusement $\mathbf{P}_{M_1}(X = k)$. Donner sans justifier $\mathbf{P}_{M_2}(X = k)$.
(b) Déterminer la loi de $X$.
(c) Pour tout $x \in ]0,1[$, on admet que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} nx^{n-1}$ est convergente et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.
Démontrer que $X$ admet une espérance et calculer $\mathbf{E}[X]$.

(Q4) Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes deux la loi $\mathcal{G}\left(\frac{1}{5}\right)$.

(a) Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X > n) = \left(\frac{4}{5}\right)^n$.
(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Expliquer l'égalité : $(\min(X,Y) > n) = (X > n) \cap (Y > n)$.
(c) En déduire $\mathbf{P}(\min(X,Y) > n)$ en fonction de $n$. En déduire la loi de $\min(X,Y)$.
(d) Déterminer le plus petit entier naturel non nul $n_0$ pour lequel $\mathbf{P}(\min(X,Y) > n) \leqslant \frac{1}{1000000}$.
*Indication. On donne :* $\dfrac{\ln(10)}{\ln(4/5)} \approx -10,31$.