Devoir maison n° 2 – Probabilités

Dans tout l'exercice, on note n un entier supérieur ou égal à 1.
On suppose que dans une certaine région, pendant une période donnée, seuls deux états météo sont possibles : le beau temps et le mauvais temps.
L'étude des bulletins météo du passé laisse penser que le temps qu'il fait un certain jour de cette période dépend du temps qu'il a fait la veille de la façon suivante :

- s'il fait beau un jour donné, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est égale à $\frac{4}{5}$;
- s'il fait mauvais un jour donné, la probabilité qu'il fasse mauvais le lendemain est égale à $\frac{2}{5}$.

On s'intéresse à une période débutant le jour 1, jour au cours duquel il a fait beau.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note :

- B_n l'événement : « il fait beau le jour n » ;
- $\overline{B_n}$ l'événement : « il fait mauvais le jour n » ;
- $u_n = \mathbf{P}(B_n)$ et $v_n = \mathbf{P}(\overline{B_n})$.

1. (a) Donner la valeur de u_1.
   (b) Donner les probabilités conditionnelles $\mathbf{P}_{B_n}(B_{n+1})$ et $\mathbf{P}_{\overline{B_n}}(B_{n+1})$.
2. (a) À l'aide de la formule des probabilités totales, établir la relation :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{3}{5}v_n.$$
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie une relation de récurrence du type « arithmético-géométrique ».
   (c) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de u_n en fonction de n.
   Indication. Consulter le cours de première année sur les suites arithmético-géométriques.
   (d) Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$ et interpréter ce résultat.
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la matrice à une ligne et deux colonnes suivante : $X_n = (u_n \quad v_n)$.
   Déterminer la matrice carrée K, indépendante de n, qui vérifie la relation suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_{n+1} = X_n K.$$
   (c) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, donner pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de X_{n+1} en fonction de X_1 et K.
   (d) En déduire sous forme de tableau, la première ligne de la matrice K^n en fonction de n. Expliquer ensuite soigneusement les étapes et les calculs qu'il faudrait faire pour obtenir à la deuxième ligne de K^n (on ne demande pas de faire les calculs).
4. En s'inspirant de la relation établie en 3.(b), écrire un programme Python qui donne u_n et v_n pour un entier n plus grand que 2 donné par l'utilisateur.

5. (a) On rappelle que si `a` est une variable booléenne (`True` ou `False`) alors `int(a)` prend comme valeur 0 si `a=False` et 1 si `a=True`. Compléter le programme Python suivant afin qu'il renvoie le nombre de jours de beau temps lors des N premiers jours de la période considérée, y compris le premier, N étant un entier plus grand que 2 donné par l'utilisateur.

```
1.  import random as rd
2.  def NbBeauTemps(N):
3.      JourBeauTemps=True
4.      n=1
5.      for i in range(........):
6.          if JourBeauTemps=True:
7.              JourBeauTemps==rd.random()<4/5
8.              n=n+int(JourBeauTemps)
9.          else:
10.             JourBeauTemps=rd.random()<....
11.             n=..........................
12.     return(n)
```

(b) Expliquer quel est le rôle de la variable `JourBeauTemps` dans le programme et pourquoi les commandes de réaffectation lignes 3, 7 et 10 sont pertinentes.

6. (a) Soit U_n l'événement « il fait beau pendant les n premiers jours de la période considérée ». Calculer $\mathbf{P}(U_n)$.

(b) Soit V_n l'événement « il fait beau au moins deux fois lors des n premiers jours de la période considérée ». Calculer $\mathbf{P}(V_n)$.