Programme de colle n° 6

à partir du lundi 6 janvier

- **Chapitres pouvant faire l'objet d'exercices**
  - Intégrations par parties
  - Intégrales généralisées

- **Question de cours/exercices à préparer**
  Les exercices doivent être préparés ***avant*** *la colle.*

(Q1) Soit a un réel strictement positif.

(a) Déterminer la nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{(1+\mathrm{e}^{ax})^2}\mathrm{d}x$ et calculer sa valeur si elle est convergente.

(b) Déterminer la nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{(1+\mathrm{e}^{ax})}\mathrm{d}x$ et calculer sa valeur si elle est convergente.

(Q2) Soit $f\,:\,[1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(2+x)^2}$ pour tout $x \in [1,+\infty[$.

(a) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{(2+x)} + \dfrac{c}{(2+x)^2}$, pour tout $x \in [1,+\infty[$.

(b) En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ est convergente et calculer sa valeur.

(Q3) Soit a un réel strictement positif.

(a) Soit $x > 0$. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer $\displaystyle\int_0^x t\mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t$ en fonction de a.

(b) Soit $x > 0$. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer $\displaystyle\int_0^x t^2\mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t$ en fonction de a.

(c) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x$ est convergente et déterminer sa valeur.

(Q4) Soit $f\,:\,[1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^3}$ pour tout $x \in [1,+\infty[$.

(a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ est convergente et déterminer sa valeur.

(b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ est convergente et déterminer sa valeur.

(c) Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2f(x)\mathrm{d}x$.

(Q5) On note $g(x) = \mathrm{e}^{-2x^2}$.

(a) i. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x^3 g(x)\mathrm{d}x$ est convergente et déterminer sa valeur.

ii. En étudiant seulement la parité/imparité de $x \mapsto x^3 g(x)$, expliquer pourquoi $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^3 \mathrm{e}^{-2x^2}\mathrm{d}x$ est convergente et donner sa valeur. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x)\mathrm{d}x$?

(b) Dans cette question, on **admet** la convergence de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ et sa valeur $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

i. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x^2 g(x)\mathrm{d}x$ est convergente et déterminer sa valeur.

ii. En étudiant seulement la parité/imparité de $x \mapsto x^2 g(x)$, expliquer pourquoi $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^2 g(x)\mathrm{d}x$ est convergente et donner sa valeur. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x)\mathrm{d}x$?

(Q6) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n(x) = (1-2x)^{n+1}\mathrm{e}^{2x}$ et $u_n = \displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} f_n(x)\mathrm{d}x$.

(a) Par croissance de l'intégrale, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2(n+2)} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{2(n+2)}$. Que peut-on en déduire concernant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

(b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $u_{n+1} = -\dfrac{1}{2} + (n+2)u_n$.

(c) On donne $u_0 = \frac{\mathrm{e}-2}{2}$. Ecrire un programme Python qui prenne un entier $n \geqslant 1$ et qui renvoie la valeur de u_n. Donner une suite d'instructions permettant de représenter les valeurs de $n \times u_n$ en fonction de n pour $n \in [\![0, 50]\!]$.

(d) Déduire la (b) et (a) limite de $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(Q7) On définit $f(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-x^2/2}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$.

(a) Démontrer que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

(b) On note X une variable aléatoire ayant f pour densité et F sa fonction de répartition. Déterminer $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(c) Dans cette question, on **admet** la convergence de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x$ et sa valeur $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. Démontrer que X admet une espérance et calculer sa valeur.