Programme de colle n° 7

à partir du lundi 19 janvier

- **Chapitres pouvant faire l'objet d'exercices**
  - Variables aléatoires à densité
- **Question de cours/exercices à préparer**
  Les exercices doivent être préparés ***avant*** *la colle.*

(Q1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} 0, \text{ si } t < 0 \\ 3\mathrm{e}^{-3t}, \text{ si } t \geqslant 0 \end{cases}$. On **admet** que f est une densité de probabilité.
Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité. On note F sa fonction de répartition.

(a) Déterminer $F(x)$ pour tout réel $x \in \mathbb{R}$.

(b) Démontrer que X admet une espérance et calculer $\mathbf{E}[X]$.

(c) On donne $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{9}$. Justifier alors que X admet une variance et calculer $\mathrm{V}(X)$.

(Q2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{3}{2}\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x\sqrt{x}}, & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

(a) On note $u(x) = x\sqrt{x}$. Déterminer et simplifier le plus possible la dérivée de u sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que f est une densité de probabilité.

(c) Soit X une variable aléatoire à densité admettant f pour densité et soit F la fonction de répartition de X. Déterminer $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(Q3) On **admet** que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 2x\mathrm{e}^{-x^2}, & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$ est une densité de probabilité. Soit X une variable aléatoire à densité admettant f pour densité. Soit F la fonction de répartition de X

(a) Déterminer $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) Calculer $\mathbf{P}\left(X \leqslant \sqrt{\ln(3)}\right), \mathbf{P}\left(X > \sqrt{\ln(2)}\right), \mathbf{P}_{\left(X \leqslant \sqrt{\ln(3)}\right)}\left(X > \sqrt{\ln(2)}\right)$.

(c) Déterminer l'unique réel positif α vérifiant $\mathbf{P}(X \geqslant \alpha) = \mathrm{e}^{-5}$.

(Q4) On admet que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, \text{ si } x \in [1,5] \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.

(a) Soit X une variable aléatoire à densité admettant f pour densité et soit F_X la fonction de répartition de X. Déterminer $F_X(x)$ pour tout réel x.

(b) Déterminer $\mathbf{P}_{(X>3)}(X \leqslant 4)$.

(c) Soit $Y = \frac{1}{4}(X-1)$. On note F_Y la fonction de répartition de Y. Déterminer $F_Y(x)$ pour tout réel x.

(d) On admet que Y est une variable aléatoire à densité. Déduire de la question précédente une densité de Y.

(Q5) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer $(A-3I)^3$. Que peut-on en déduire en ce qui concerne les valeurs propres de A ?

(b) A l'aide d'une preuve par l'absurde, en déduire que la matrice A n'est pas diagonalisable.

(c) Déterminer un vecteur $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nul pour lequel $AX = 3X$.