Devoir maison n° 3 – Études de fonctions - Intégrales - Variables aléatoires à densité

Exercice 1.

On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0,+\infty[\setminus\{1\}$ par : $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}$. On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f.

Allure de $\mathscr{C}_f$

1. Écrire en Python un programme appelé `f` qui donne la valeur de $f(x)$ pour une valeur de x donnée par l'utilisateur.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$.
3. Montrer que f est croissante sur chacun des intervalles $[0,1[$, $]1,+\infty[$.
4. (a) Montrer que l'équation $f(x)=4$ admet une unique solution α sur $[0,1[$.
   (b) Montrer que $\alpha<\dfrac{9}{10}$. (On donne $\mathrm{e}^{-\frac{9}{10}}\approx 0.407$.)
   (c) Écrire un programme Python qui permet de donner une valeur approchée de α à 10^{-4} près à l'aide de la méthode de dichotomie. On pourra appeler le programme de la question 1.
5. Préciser l'équation de la tangente T au point A de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 0.
6. On note B le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $\frac{1}{2}$.
   (a) Calculer l'ordonnée de B.
   (b) Montrer que la droite D d'équation $y=2\left(\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}-1\right)x+1$ passe par les points A et B.
7. On admet que la fonction f est convexe sur $[0,1[$, et concave sur $]1,+\infty[$.
   Que peut-on déduire sur les positions relatives de $\mathscr{C}_f$, de D, et de T sur l'intervalle $\left[0,\frac{1}{2}\right]$?
8. Donner l'allure de $\mathscr{C}_f$ en traçant sur le même schéma les droites D et T.
   (On donne $f\left(\frac{1}{2}\right)\approx 1{,}2$ et on prendra 3 cm/carreaux pour unité.)

Encadrement de la valeur d'une intégrale

On se propose dans cette, partie de déterminer des encadrements de l'intégrale I suivante :

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

On ne cherchera jamais à calculer cette intégrale.

1. Interpréter l'intégrale I en terme d'aire d'un domaine que l'on hachurera sur le schéma de la question **1.8.**
2. Montrer que : $\forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\quad 1\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.
   En déduire l'encadrement suivant : $\dfrac{1}{2}\leqslant I\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.
3. Prouver que pour tout réel x dans l'intervalle $\left[0,\frac{1}{2}\right]$: $\dfrac{1}{1-x}=1+x+\dfrac{x^2}{1-x}$.
   En déduire que : $I=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}(1+x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{1}{2}}x^2f(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Effectuer une intégration par parties, pour calculer :
$$\int_0^{\frac{1}{2}}(1+x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$
5. En utilisant la question **2.2.**, montrer que :
$$\frac{1}{24}\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}x^2f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{12\sqrt{\mathrm{e}}}.$$
   En déduire un nouvel encadrement de I.

6. En utilisant la considération géométrique de la question **1.7.**, justifier l'encadrement :

$$\frac{1}{2} \leqslant I \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \left[2\left(\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}} - 1\right) x + 1 \right] \mathrm{d}x.$$

En déduire un dernier encadrement de I.

Exercice 2.

Soit f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

1. (a) Calculer la dérivée de la fonction m définie pour tout réel x positif ou nul par : $m(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.
   (b) Soit A un réel strictement positif. On pose : $I(A) = \displaystyle\int_0^A x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$.
   Déduire de la question précédente la valeur de $I(A)$. Calculer $\lim\limits_{A \to +\infty} I(A)$.
   (c) En déduire que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

   On considère dans la suite de l'exercice, une variable aléatoire X à valeurs positives admettant f pour densité.
2. Soit U une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On rapelle qu'une densité g de U est donnée pour tout x réel par : $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.
   (a) Rappeler la relation liant $\mathbf{V}(U), \mathbf{E}[U^2]$ et $\mathbf{E}[U]^2$. En déduire la valeur de $\mathbf{E}[U^2]$.
   (b) En écrivant $\mathbf{E}[U^2]$ sous forme d'intégrale, donner la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$.
   (c) Soit h la fonction définie pour tout réel x par $h(x) = x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.
   Montrer que la fonction h est paire.

   En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ et celle de $\mathbf{E}(X)$.
3. Soit A un réel strictement positif.
   (a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, l'égalité suivante :
   $$\int_0^A x^3\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = -A^2\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} + 2\int_0^A x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x.$$
   (b) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 2$.
   (c) Calculer $\mathbf{V}(X)$.
4. On pose $Y = \frac{X^2}{2}$. On note F la fonction de répartition de X et G la fonction de répartition de Y.
   (a) Déterminer l'expression de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Établir pour tout réel x positif, l'égalité suivante : $G(x) = F(\sqrt{2x})$.
   (c) En déduire que Y suit la loi exponentielle.
   (d) Calculer $\mathbf{E}[Y]$ et retrouver ainsi la valeur de $\mathbf{V}(X)$.