Programme de colle n° 8

à partir du lundi 2 février

— **Chapitres pouvant faire l'objet d'exercices**
  — Réduction de matrices

— **Question de cours/exercices à préparer**
  Les exercices doivent être préparés ***avant*** *la colle.*

(Q1) Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $B^3 + B^2 + B$. Que peut-on en déduire concernant les valeurs propres de B ?
2. A l'aide d'une preuve par l'absurde et de la question précédente, montrer que B n'est pas diagonalisable.
3. Déterminer un vecteur $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nul pour lequel $BX = 0_{3,1}$.

(Q2) Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que 0, -1 et 2 sont valeurs propres de C en déterminant un vecteur propre pour chacune d'entre elles.
2. Donner une matrice P inversible pour laquelle $D = P^{-1}CP$, avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On n'oubliera pas de démontrer l'inversibilité de P.

(Q3) Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ de fonction de répartition F_U. On définit :

- $X = 3U$,
- $Y = X + 1$,
- $Z = -\frac{1}{\lambda}\ln(U)$, où $\lambda > 0$.

On note F_X, F_Y et F_Z leurs fonctions de répartitions respectives.

1. Proposer en utilisant uniquement l'instruction `rd.random()` une commande Python permettant de renvoyer une réalisation de X et Y.
2. Rappeler l'expression de $F_U(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer soigneusement $F_X(x)$, $F_Y(x)$ et $F_Z(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Les variables aléatoires X, Y et Z suivent-elles des lois usuelles ?
4. Comment obtenir une réalisation d'une loi exponentielle de paramètre λ en Python sans utiliser `rd.exponential` ?

(Q4) On admet que la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}, & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$ est une fonction de répartition d'une loi à densité. Soit X une variable aléatoire admettant F pour fonction de répartition. On définit $Y = X^2$.

1. Déterminer soigneusement la fonction de répartition F_Y de Y.
2. Reconnaître la loi de Y. Déterminer $\mathbf{E}[Y]$ et $V(Y)$.
3. Déduire de ce qui précède que X^4 admet une espérance et la calculer.

(Q5) Soient $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda_1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda_2)$, indépendantes. On note $M = \min(X, Y)$.

1. (i) Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier soigneusement l'égalité $(M > x) = (X > x) \cap (Y > x)$.
   (ii) En déterminant F_M (fonction de répartition de M), démontrer que $M \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
2. Yann et Mériadec font la queue au comptoir, auprès de deux barmaids différentes. On note X_1 le temps d'attente avec la première barmaid, et X_2 celui avec la seconde barmaid. On suppose que $X_1 \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{5}\right)$ et $X_2 \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{3}\right)$.
   (i) Quel est le temps d'attente moyen du premier servi ?
   (ii) Quel est le temps d'attente moyen du dernier servi ?
   Indication. Après l'avoir expliqué, on pourra utiliser la relation
   $X+Y = \max(X, Y)+\min(X, Y)$, valable pour tout couple de variables aléatoires (X, Y).