

Programme de colle n° 9

à partir du lundi 16 février

— Chapitres pouvant faire l'objet d'exercices

- Variables aléatoires à densité, y compris lois usuelles
- Inégalités, convergence, estimations

— Question de cours/exercices à préparer

Les exercices doivent être préparés **avant** la colle.

(Q1) Soit $n \geq 2$. On admet que la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = \begin{cases} n(1-t)^{n-1}, & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

est une densité de probabilité. Soit X_n une variable aléatoire admettant f_n pour densité. On note F_n sa fonction de répartition.

- Calculer l'expression de $F_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- On considère l'équation $F_n(x) = \frac{1}{2}$. Montrer que cette équation admet une unique solution que l'on déterminera.
- On pose $Y_n = -\ln(1 - X_n)$ et on admet que Y_n est une variable aléatoire à densité. On note G_n sa fonction de répartition.
Calculer l'expression de $G_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Reconnaître la loi de Y_n .

(Q2) On admet que pour tout $a > 1$, la fonction $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_a(t) = \begin{cases} \frac{a}{t^{a+1}}, & \text{si } t \geq 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

est une densité de probabilité. Si une variable aléatoire X admet f_a pour densité, on note $X \hookrightarrow \mathcal{L}(a)$.

- Soit $X \hookrightarrow \mathcal{L}(a)$ et F sa fonction de répartition. Déterminer $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi $\mathcal{L}(a)$. On pose

$$T_n = \min(X_1, \dots, X_n)$$

et on note G_n sa fonction de répartition.

Calculer $\mathbf{P}(T_n > x)$ pour tout réel x . En déduire l'expression de $G_n(x)$ pour tout réel x puis conclure que T_n suit également une loi $\mathcal{L}$ dont on déterminera le paramètre.

(Q3) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. Soit Y la variable aléatoire discrète infinie à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(Y = n) = \mathbf{P}(n \leq X < n + 1).$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Rappeler la fonction de répartition F de X , et en déduire $\mathbf{P}(Y = n)$.
- Démontrer que $\sum_{n \geq 0} \mathbf{P}(Y = n)$ est convergente, de somme 1.
Indication. On pourra se ramener à une somme télescopique.
- On pose $Z = Y + 1$. Vérifier que $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - e^{-1})$. En déduire $\mathbf{E}[Y]$ et $V(Y)$.

(Q4) Soit X une variable aléatoire admettant une espérance m et une variance v . Pour tout entier $n \geq 1$, on dispose d'un n -échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de la loi de X . On pose :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

et

$$\bar{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k^2 - \bar{X}_n^2)$$

- Exprimer $\mathbf{E}[X^2]$ au moyen de m et v .
- Montrer que $\bar{X}_n$ est un estimateur sans biais de m .
- Exprimer $V(\bar{X}_n)$ en fonction de v , en déduire $\mathbf{E}[\bar{X}_n^2]$ au moyen de m et v .
- Calculer le biais de $\bar{\sigma}_n^2$ en tant qu'estimateur de v .