Durée : quatre heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

ERRATUM

Exercice I : Etude d'une application linéaire

On définit sur $\mathbb{R}^3$ une application φ au moyen de la formule :

$$\forall\,(x;y;z)\in\mathbb{R}^3\quad \varphi(x;y;z)=\frac{1}{2}\cdot(2x+3y+5z\ ;\ -2x-3y-5z\ ;\ 2x-3y-z)$$

On notera id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}=(e_1;e_2;e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ dans cet exercice.

1. (a) Rappeler la définition d'une application linéaire puis démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Donner la matrice M associée à φ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Déterminer $Ker(\varphi)$ et en donner une base.
   Dans toute la suite, u désignera un vecteur non nul de $Ker(\varphi)$.
2. L'application φ est-elle injective ?
3. (a) Déterminer le rang de l'application φ
   (b) On pose $u_2=\varphi(e_2)$ et $u_3=\varphi(e_3)$. Justifier que $(u_2;u_3)$ est une base de $Im(\varphi)$
   (c) L'application φ est-elle surjective ?
4. Justifier que la famille $\mathcal{B}'=(u;u_2;u_3)$ forme toujours une base de $\mathbb{R}^3$.
5. On considère la matrice $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$.
   Démontrer que P est inversible et en donner son inverse.
6. Expliciter la matrice PMP^{-1}. Qu'observez-vous ?
7. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, déterminer la matrice de φ^n dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
8. (a) Déterminer $E=Ker(\varphi-2\cdot id)$
   (b) Déterminer $F=Ker(\varphi+3\cdot id)$
   (c) Démontrer enfin que $Im(\varphi)=E\oplus F$

(d'après ENS paris-Saclay D2 -2021)

Exercice II : Une étude simplifiée de $cotan$

On note E l'ensemble des applications définies sur $I=[0;1]$, dérivables, à dérivée continue sur $[0;1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et vérifiant $f(0)=f(1)=0$.
On rappellera que la fonction $\tan$ peut être définie comme $\tan=\dfrac{\sin}{\cos}$ et on notera $co\tan=\dfrac{\cos}{\sin}$. Les domaines de définition réels respectifs de ces deux fonctions seront écrits $\mathcal{D}_{\tan}$ et $\mathcal{D}_{co\tan}$

Partie I

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^I$ usuel des applications de I dans $\mathbb{R}$.
2. Déterminer explicitement les ensembles $\mathcal{D}_{\tan}$ et $\mathcal{D}_{co\tan}$.
3. Les fonction $\tan$ et $co\tan$ sont-elles des éléments de E ?
4. (a) Vérifier que la fonction $x \mapsto co\tan(\pi x)$ peut être définie sur $]0;1[$.
   (b) Donner un équivalent de $co\tan(\pi x)$ pour x au voisinage de 0, avec $x > 0$.
   (c) Justifier que l'on a :
   $$co\tan(\pi x) \sim \frac{1}{\pi(x-1)} \quad \text{lorsque } x \to 1^-$$
5. Déterminer une expression de la dérivée de la fonction $x \mapsto co\tan(\pi x)$ sur $]0;1[$
6. Démontrer que la fonction $x \mapsto co\tan(\pi x)$ est bijective de $]0;1[$ dans $\mathbb{R}$.
7. Tracer la courbe représentative de $co\tan$ sur $]0;1[$ en faisant figurer toute droite remarquable que vous jugerez utile.

Partie II

Soit f un application quelconque de E. On définit alors une nouvelle fonction, associée à f, par :

$$T(f) : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$$

1. Vérifier que $T(f)$ admet un prolongement par continuité en 0 (par la droite).
   On continuera de noter $T(f)$ ce prolongement qui est donc une fonction définie sur $[0;1]$.
2. Vérifier que T est une application linéaire de E dans $\mathcal{C}^0(I)$ (espace vectoriel des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ continues)
3. Etablir que T est injective.
4. L'application T est-elle surjective ?

Partie III

1. Décrire $A = \mathcal{D}_{\tan} \cap \mathcal{D}_{co\tan}$.
2. En précisant les valeurs réelles de x permettant le calcul, déterminer $\tan(x)co\tan(x)$ le plus simplement possible.

(d'après ENS paris-Saclay D2 -2021)

Exercice III : Probabilités

Partie I : étude binomiale préliminaire

Les résultats de cette partie pourront être admis pour les autres parties.

Soient k et n deux entiers naturels non nuls vérifiant $k \leq n$.

1. Etablir que l'on a $\binom{n}{k} = \dfrac{n}{k} \times \binom{n-1}{k-1}$
2. Démontrer que l'on a :
   $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$
3. Etablir que :
   $$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$
   On pourra raisonner par récurrence sur n

Partie II : expériences avec des urnes

On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant un nombre $N \in \mathbb{N}^*$ de boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à N.

Dans chacune des questions données, on réalise une expérience donnée au moyen de tirages depuis $\mathcal{U}$.

1. On réalise l'expérience suivante :
   On tire successivement, avec remise, les boules une par une jusqu'à tirer la boulée marquée du numéro 1
   On définit X comme la variable aléatoire qui renvoie le nombre de tirages effectués. En justifiant, préciser la loi de X en donnant les paramètres associés.
2. On réalise l'expérience suivante :
   On tire successivement, sans remise, les boules une par une jusqu'à tirer la boulée marquée du numéro 1
   On définit Y comme la variable aléatoire qui renvoie le nombre de tirages effectués.
   Démontrer soigneusement que Y suit une loi uniforme entière sur l'ensemble $[\![1\ ;\ N]\!]$.
3. On réalise l'expérience suivante :
   On tire un tirage de r boules simultanément depuis l'urne, avec r entier compris entre 1 et N
   Considérant un entier m de $[\![1\ ;\ N]\!]$, on note Z le nombre de boules tirées et marquées d'un numéro i inférieur ou égal à l'entier m.
   Démontrer que, sous ces conditions, on a $\mathbb{P}[Z = n] = \dfrac{\binom{m}{n}\binom{N-m}{r-n}}{\binom{N}{r}}$ lorsque l'entier naturel n vérifie $n \leq m$ et $n \leq r$.
   Déterminer ensuite la valeur de $\mathbb{E}[Z]$.

Partie III : Deviner le nombre de boules de l'urne

On cherche dans cette section à procéder à une expérience donnant, en moyenne espérée, le nombre total de boules de l'urne N. Pour cela, on réalise k tirages successifs sans remise depuis $\mathcal{U}$. On notera $X_1\ ;\ \dots\ ;\ X_k$ les numéros obtenus respectivement pour ces différents tirages.
On désignera enfin par M la variable aléatoire renvoyant le maximum des valeurs $X_1\ ;\ \dots\ ;\ X_k$.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs réalisables pour M nommé *support* de M.
2. Déterminer la valeur de :
   $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\neq j}[X_i = X_j]\right)$$
   et en déduire la valeur de
   $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\neq j}[X_i \neq X_j]\right)$$
3. Démontrer que, pour $0 \leq n < k$ on a $\mathbb{P}[M = n] = 0$
4. Etablir que, pour $k \leq n \leq N$ on a $\mathbb{P}[M = n] = \dfrac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{N}{k}}$
5. Vérifier par le calcul que $\mathbb{E}[M] = \frac{k}{k+1}(N+1)$
6. Détailler un protocole utilsant les résultats $X_1, \dots, X_k$ des tirages effectués pour proposer une valeur E dont la moyenne espérée est N le nombre de boules de $\mathcal{U}$.
   Justifier votre choix

(d'après ENS paris-Saclay D2 -2021)

Exercice IV : Relations binaires

On considère l'ensemble E des parties de $\mathbb{R}^n$ où $n \in \mathbb{N}$ est au moins 2. Ainsi $A \in E$ signifie $A \subset \mathbb{R}^n$.
On définit sur E une relation binaire $\sim$ au moyen de :

$$A \sim B \quad \text{si, et seulement si} \quad \exists x \in \mathbb{R}^n\ \ \forall y \in \mathbb{R}^n\ \ y \in A\ \Leftrightarrow\ y + x \in B$$

1. Etablir que la relation binaire $\sim$ est une relation d'équivalence sur E
2. Déterminer la classe d'équivalence de $\mathbb{R}^n$ pour $\sim$.
3. Soit $A \in E$ un ensemble fini. Justifier que, si $B \in E$ est tel que $A \sim B$ alors B est fini de même cardinal que A. Réciproquement, a-t-on que si B est fini de même cardinal que A, alors $A \sim B$?
4. Dans cette question <u>seulement</u> on considère que $n = 2$.
   (a) Soit $u = (1; 1) \in \mathbb{R}^2$ non nul et $D = vect(u)$. Représenter graphiquement D dans un repère orthonormé. Adjoindre un élément $D' \in E$ vérifiant $D' \sim D$ et $D' \neq D$ choisi par vos soins (vous justifierez que votre choix convient).
   (b) Justifier que, si $\mathcal{D}$ est une droite du plan assimilable à un sous-ensemble noté également $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$, alors on a :
   $$\mathcal{D} \sim \mathcal{D}' \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{D} /\!/ \mathcal{D}'$$
   (c) Soient f et g deux applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. De façon générale, on désignera par $\mathcal{C}_\varphi$ la courbe représentative dans le plan rapporté à un repère, de toute application $\varphi \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ et assimilée à :
   $$\mathcal{C}_\varphi = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \varphi(x)\}$$
   Etablir que $(f - g)' = \odot$ (fonction nulle) $\Rightarrow \quad \mathcal{C}_f \sim \mathcal{C}_g$
   (d) La fonction f étant fixée, continue sur $\mathbb{R}$, a-t-on que, pour tout $A \subset \mathbb{R}^2$, si $A \sim \mathcal{C}_f$ alors A est la courbe représentative d'une fonction a continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $a = f + \text{C}^{te}$?
5. On se place de nouveau dans le cas général où $n \geq 2$
   (a) Soient F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Démontrer que $F_1 \sim F_2 \ \Leftrightarrow \ F_1 = F_2$
   (b) Décrire la classe d'équivalence $\overline{F}$ d'une sous espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ selon $\sim$.